

Montrer qu'une partie est stable pour une loi interne.

Exercice 1: Montrer que $A = \left\{ \frac{1+3a}{1+3b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ est une partie stable de \mathbb{Q} pour la multiplication

Soit $x, y \in A \quad \exists a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ tq } x = \frac{1+3a}{1+3b} \text{ et } y = \frac{1+3c}{1+3d}$

$$x \cdot y = \frac{1+3a}{1+3b} \times \frac{1+3c}{1+3d}$$

$$= \frac{1+3a+3c+9ac}{1+3b+3d+9bd} =$$

$$= \frac{1+3(a+c+3ac)}{1+3(b+d+3bd)}$$

$$= \frac{1+3A}{1+3B} \quad \text{avec } A = a+c+3ac \in \mathbb{Z} \text{ et } B = b+d+3bd \in \mathbb{Z}$$

donc $x \cdot y \in A$ donc A est stable.

Exercice 2: Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une loi interne $*$ associative.

Soit $C = \left\{ x \in E \mid \forall y \in E, x * y = y * x \right\}$ appelé centre de E .

Montrer que C est stable pour $*$

Soient $a, b \in C$ on veut montrer que $a * b \in C$.

$$\forall y \in E \quad (a * b) * y = a * (b * y) \quad \text{car } * \text{ associative}$$

$$= a * (y * b) \quad \text{car } b \in C$$

$$= (a * y) * b \quad * \text{ associative}$$

$$= (y * a) * b \quad \text{car } a \in C$$

$$= y * (a * b) \quad \text{car } * \text{ associative}$$

donc $a * b \in C$,

Conclusion C est stable pour $*$.