LES MORPHISMES

I Définitions

Définition :

Soient $(E, *)$ et $(F, \top)$ deux ensembles munis d'une loi interne

On appelle morphisme de $(E, *)$ dans $(F, \top)$ toute application $f : E \to F$ telle que

$\forall (x, y) \in E^2, \; f(x * y) = f(x) \top f(y)$

Vocabulaire :

- Un endomorphisme est un morphisme de E dans E
- Un isomorphisme est un morphisme bijectif
- Un automorphisme est un endomorphisme bijectif

Remarque :

On peut dire qu'un morphisme "transforme" la loi de l'ensemble de départ en la loi de l'ensemble d'arrivée.

Exemples :

1) $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y$

donc $\ln$ est un morphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$

D'autre part :

$\ln$ est dérivable donc continue

et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

donc $\ln$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$

Théorème des bijections

Conclusion : $\ln$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$

2) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

donc exp est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, \times)$

Attention.

Définie ainsi, ce n'est pas un isomorphisme car les réels négatifs ou nuls ne possèdent pas d'antécédent donc elle n'est pas surjective.

↳ En appliquant le théorème des bijections, on obtient

exp est dérivable donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

donc exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$

Conclusion :

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$

3) les fonctions linéaires non nulles sont définies par

$f_a \begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}^*$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f_a(x+y) = a(x+y)$

$= ax + ay$

$= f_a(x) + f_a(y)$

donc f_a est un endomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$

D'autre part,

$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists !\ x = \frac{y}{a} \in \mathbb{R},\ y = f_a(x)$

donc f_a est bijective.

Conclusion : f_a $(a \neq 0)$ est un automorphisme de $(\mathbb{R}, +)$

Proposition :

1) Si $f : (E, *) \to (F, \top)$ et $g : (F, \top) \to (G, \perp)$ sont deux morphismes

Alors $g \circ f : E \to G$ est un morphisme de $(E, *)$ dans $(G, \perp)$

2) Pour tout ensemble E muni d'une loi interne $*$

$Id_E : \begin{pmatrix} E \to E \\ x \mapsto x \end{pmatrix}$ est un automorphisme de $(E, *)$

3) Si $f : (E, *) \to (F, \top)$ est un isomorphisme

Alors $f^{-1} : F \to E$ est un isomorphisme de $(F, \top)$ dans $(E, *)$

Démonstration

1) $\forall (x, y) \in E^2$

$$
\begin{aligned}
g \circ f(x * y) &= g(f(x * y)) \\
&= g(f(x) \top f(y)) \text{ car } f \text{ morphisme} \\
&= g(f(x)) \perp g(f(y)) \text{ car } g \text{ morphisme} \\
&= g \circ f(x) \perp g \circ f(y)
\end{aligned}
$$

donc $g \circ f$ est un morphisme de $(E, *)$ dans $(G, \perp)$

2) Trivial

3) f bijective donc f^{-1} existe et est bijective

$\forall (u, v) \in F^2$ on a $u = f(f^{-1}(u))$ et $v = f(f^{-1}(v))$

donc $u \top v = f(f^{-1}(u)) \top f(f^{-1}(v))$

$\iff u \top v = f(f^{-1}(u) * f^{-1}(v))$ car f morphisme

On obtient alors, en composant par f^{-1}

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(u \top v) &= f^{-1}\left[f(f^{-1}(u) * f^{-1}(v)) \right] \\
&= f^{-1} \circ f (f^{-1}(u) * f^{-1}(v)) \\
&= f^{-1}(u) * f^{-1}(v)
\end{aligned}
$$

f^{-1} est donc un isomorphisme de $(F, \top)$ dans $(E, *)$

exemple

$\ln$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$

$\exp$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$

f_a $(a \neq 0)$ est un automorphisme de $(\mathbb{R}, +)$

donc

1) $(\mathbb{R}, +) \xrightarrow{\exp} (\mathbb{R}_+^*, \times) \xrightarrow{\ln} (\mathbb{R}, +)$, composée : $\ln \circ \exp$

Conclusion : $\ln \circ \exp$ est un automorphisme de $(\mathbb{R}, +)$

Remarque : on a de façon triviale

$$\ln \circ \exp = Id_{\mathbb{R}}$$

2) De même

$\exp \circ \ln$ est un automorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

et on a $\exp \circ \ln = Id_{\mathbb{R}_+^*}$

3°) $(\mathbb{R}_+^*, \times) \xrightarrow{\ln} (\mathbb{R}, +) \xrightarrow{f_a} (\mathbb{R}, +)$

donc $f_a \circ \ln \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \end{array} \right)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$

4°) ATTENTION lors de la composition des morphismes, il faut faire très attention aux lois internes

pour $a > 0$ $\mathbb{R}_+^* \xrightarrow{f_a} \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{\ln} \mathbb{R}$, composée : $\ln \circ f_a$ — l'application $\ln \circ f_a$ existe et est bijective

Avec les lois internes $(\mathbb{R}_+^*, +) \xrightarrow{f_a} \boxed{\begin{array}{c} (\mathbb{R}_+^*, +) \\ (\mathbb{R}_+^*, \times) \end{array}} \xrightarrow{\ln} (\mathbb{R}, +)$

Incompatibilité des lois internes

Comme f_a n'est pas un morphisme pour la multiplication

$\ln \circ f_a \left(\begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(ax) \end{array} \right)$ n'est pas un morphisme

ce n'est qu'une application bijective