STRUCTURES ALGEBRIQUES
GROUPES ANNEAUX ET CORPS

I Structure de groupe

1°) Définition

Définition : Soit $(G, *)$ un ensemble muni d'une loi interne

$(G, *)$ est un groupe

Ssi $\begin{cases} * \text{ est associative} \\ G \text{ admet un élément neutre pour } * \\ \text{Tout élément de } G \text{ possède un symétrique pour } * \end{cases}$

Si de plus la loi $*$ est commutative

Alors $(G, *)$ est un groupe abélien ou commutatif

Exemples à connaître

- $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$ sont des groupes commutatifs
- $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe

  car les éléments non nuls ne possèdent pas de symétrique
- $(\mathbb{R}, \times)$ n'est pas un groupe

  car 0 n'a pas de symétrique
- $(\mathbb{C}, +)$ et $(\mathbb{D}, +)$ sont des groupes
- $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$ sont des groupes

- Attention, $(\mathbb{D}^*, \times)$ n'est pas un groupe

  car 3 ne possède pas de symétrique $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

proposition : Dans un groupe, tout élément est régulier

Démonstration :

Soit $x \in G$

$\forall y, z \in G \quad x * y = x * z$

$\Rightarrow x^{-1} * (x * y) = x^{-1} * (x * z)$

$\Rightarrow (x^{-1} * x) * y = (x^{-1} * x) * z \Leftrightarrow e * y = e * z$

$\Rightarrow y = z$

Vocabulaire

- Si $(G, *)$ est un groupe fini, on appelle **ordre de G** le cardinal de G (nombre d'éléments de G)

exemple :

- On considère dans $\mathbb{Z}$ la relation de congruence modulo n $(n \in \mathbb{N}^*)$

$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \quad a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow b - a$ est un multiple de n

- Cette relation est une relation d'équivalence et on peut dénombrer n classes qui correspondent aux restes de la division euclidienne par n.
- L'ensemble des classes d'équivalence est noté $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ et on a $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \ldots, \dot{n-1}\}$
- $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}, +)$ est un groupe fini d'ordre n

2°) Sous-groupes

Définition :

Soit $(G, *)$ un groupe. Soit $H \in \mathcal{P}(G)$ $(H \subset G)$

$(H, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$

$\boxed{\text{ssi}}$ i) $\forall (x, y) \in H^2, x * y \in H$ (H est stable pour $*$)

ii) $e \in H$

iii) $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

Autrement dit :

$(H, *)$ est un sous groupe de $(G, *)$

$\boxed{\text{ssi}}$ $\begin{cases} H \text{ est stable pour } * \\ H \text{ est un groupe pour la loi induite par } * \end{cases}$

Exemples :

- $(\mathbb{R}, +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}, +)$
- $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$
- $([-1; 0[\cup]0; 1], \times)$ n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$ car $\frac{1}{3} \in [-1, 0[\cup]0, 1]$ mais $\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \notin [-1, 0[\cup]0, 1]$
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z} = \{na, a \in \mathbb{Z}\}$
  $(n\mathbb{Z}, +)$ est un sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$

Proposition : Soit $(G, *)$ un groupe

soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous groupes de G

Alors $\left(\bigcap_{i \in I} H_i, *\right)$ est un sous groupe de $(G, *)$

Remarque : Formulé plus simplement

L'intersection de 2 ou plusieurs sous-groupes de G est un sous groupe de G

Démonstration.

Soit $H = \bigcap_{i \in I} H_i$

1°/ $\forall (x,y) \in H^2$

$\forall i \in I$ $x \in H_i$ et $y \in H_i \Rightarrow x * y \in H_i$ car H_i sous groupe

$\Rightarrow x * y \in H$

2°/ $\forall i \in I$ $e \in H_i$ car H_i est un sous groupe

$\Rightarrow e \in H$.

3°/ $\forall x \in H$

$\forall i \in I$ $x \in H_i \Rightarrow x^{-1} \in H_i$ car H_i ssgpe.

$\Rightarrow x^{-1} \in H$.

Proposition: Caractérisation d'un sous groupe

Soit $(G,*)$ un groupe, Soit $H \in \mathcal{P}(G)$

$(H,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$

$\boxed{\text{ssi}}$ $\begin{cases} H \text{ est non vide} \\ \forall x,y \in H,\ x * y^{-1} \in H \quad (\text{ou } x^{-1} * y \in H) \end{cases}$

Remarque importante:

Pour montrer que H est non vide, on montrera que $e \in H$ car si $e \notin H$ alors H ne sera pas un sous groupe $\Rightarrow$ gain de temps

Démonstration:

1. $\Rightarrow$) Triviale

2. $\Leftarrow$) $\rightarrow \forall x \in H$ $x * x^{-1} \in H \Rightarrow e \in H$

$\rightarrow \forall x \in H$ $e * x^{-1} \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$

$\rightarrow \forall x,y \in H$ donc $y^{-1} \in H$

donc $x * (y^{-1})^{-1} \in H$

$\Leftrightarrow x * y \in H$.