Montrer qu'un ensemble muni d'une loi interne est un groupe, ou un sous-groupe

Exercice : On définit la loi $*$ dans l'ensemble $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par

$(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y)$

1°) Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif

2°) Montrer que $(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, *)$ est un sous groupe de $(G, *)$

1°) → Interne

$\forall (x, y), (x', y') \in G$

$xx' \in \mathbb{R}^*$ car $x \neq 0$ et $x' \neq 0$

et $xy' + y \in \mathbb{R}$

donc $(xx', xy' + y) \in G$

$\Leftrightarrow (x, y) * (x', y') \in G$

$*$ est donc une loi interne dans G

→ associativité

$\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in G$

- $((x, y) * (x', y')) * (x'', y'')$
  $= (xx', xy' + y) * (x'', y'')$
  $= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)$

- $(x, y) * ((x', y') * (x'', y''))$
  $= (x, y) * (x'x'', x'y'' + y')$
  $= (xx'x'', x(x'y'' + y') + y)$
  $= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)$

$*$ est associative.

→ Commutativité

$(1,1) * (2,0) = (2,1)$

$(2,0) * (1,1) = (2,2)$

$*$ n'est pas commutative

→ Elément neutre

Remarque : On aurait aussi pu faire une conjecture et la vérifier

$\forall (x,y) \in G$

$(x,y) * (a,b) = (x,y)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xa = x \\ xb + y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ xb = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

donc $(1,0)$ est neutre à droite.

D'autre part

$(1,0) * (x,y) = (1x, 1y + 0) = (x,y)$

$(1,0)$ est neutre pour $*$

→ Symétriques

$\forall (x,y) \in G$

$(x,y) * (x',y') = (1,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xx' = 1 \\ xy' + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{x} \\ y' = -\frac{y}{x} \end{cases}$ car $x \neq 0$

D'autre part

$\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right) * (x,y) = \left(\frac{1}{x} \times x, \frac{1}{x} \times y - \frac{y}{x}\right) = (1,0)$

Tout élément de G possède un symétrique et on a $(x,y)^{-1} = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$

Conclusion : $(G, *)$ est un groupe.

2°) posons $H = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

→ On vérifie que H est non vide en vérifiant que l'élément neutre appartient à H

$1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $0 \in \mathbb{R}$

$(1, 0) \in H$

→ stabilité de H pour $*$

$\forall (x, y), (x', y') \in H$

$\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ et } x' > 0 \\ y, y' \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xx' > 0 \\ xy' + y \in \mathbb{R} \end{cases}$

donc $(x, y) * (x', y') \in H$

H est stable par $*$

→ symétriques

$\forall (x, y) \in H$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^* \\ -\frac{y}{x} \in \mathbb{R} \end{cases}$

$(x, y)^{-1} \in H$

Conclusion : $(H, *)$ est un sous-groupe de $(G, *)$