Utilisation de la caractérisation d'un sous-groupe

Exercice : 1°) Montrer que $G = \left\{ \frac{1+2a}{1+2b} ; (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$

2°) Montrer que $H = \left\{ \frac{1+4u}{1+4v} ; (u,v) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ est un sous-groupe de G

1°) → inclusion

Remarque : G est l'ensemble des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont impairs

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2$ $\begin{cases} 1+2a \in \mathbb{Z}^* \\ 1+2b \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \Rightarrow \frac{1+2a}{1+2b} \in \mathbb{Q}^*$.

$G \subset \mathbb{Q}^*$

→ non vide (élément neutre)

L'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{Q}^*$ est 1

$1 = \frac{1+2\times 0}{1+2\times 0} \in G$

$G \neq \emptyset$

→ caractérisation

$\forall x = \frac{1+2a}{1+2b} \in G \quad \forall y = \frac{1+2a'}{1+2b'} \in G$

$$x \cdot y^{-1} = \frac{1+2a}{1+2b} \times \frac{1+2b'}{1+2a'}$$

$$= \frac{1+2a+2b'+4ab'}{1+2b+2a'+4ba'} = \frac{1+2(a+b'+2ab')}{1+2(b+a'+2ba')}$$

$$= \frac{1+2A}{1+2B} \quad \text{avec} \begin{cases} A = a+b'+2ab' \in \mathbb{Z} \\ B = b+a'+2ba' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

donc $x \cdot y^{-1} \in G$

cl : $(G, \cdot)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$

2) De même pour H, on montre que

→ $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2$

$$\frac{1+4a}{1+4b} = \frac{1+2\times 2a}{1+2\times 2b} = \frac{1+2A}{1+2B} \quad \text{avec} \begin{cases} A = 2a \in \mathbb{Z} \\ B = 2b \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

donc $\frac{1+4a}{1+4b} \in G$ $\quad H \subset G$

→ $1 = \frac{1+4\times 0}{1+4\times 0} \in H$, $H \neq \emptyset$

→ $\forall x = \frac{1+4a}{1+4b} \in H$ $\forall y = \frac{1+4a'}{1+4b'} \in H$

$$x \cdot y^{-1} = \frac{1+4a}{1+4b} \times \frac{1+4b'}{1+4a'}$$

$$= \frac{1+4a+4b'+16ab'}{1+4b+4a'+16ba'} = \frac{1+4(a+b'+4ab')}{1+4(b+a'+4ba')}$$

$$= \frac{1+4A}{1+4B} \quad \text{avec} \begin{cases} A = a+b'+4ab' \in \mathbb{Z} \\ B = b+a'+4ba' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

donc $x \cdot y^{-1} \in H$

Conclusion : H est un sous groupe de G