II Structure d'anneaux

1°) Définition

Définition :

Soit A un ensemble muni de 2 lois internes $+$ et $\circ$

1) $(A, +, \circ)$ est un pseudo-anneau

$\boxed{\text{Si}}$ $\begin{cases} (A, +) \text{ est un groupe commutatif} \\ \circ \text{ est associative} \\ \circ \text{ est distributive sur } + \end{cases}$

2) $(A, +, \circ)$ est un anneau

$\boxed{\text{Si}}$ $\begin{cases} (A, +, \circ) \text{ est un pseudo-anneau} \\ A \text{ admet un élément neutre pour } \circ \end{cases}$

$\boxed{\text{Si}}$ de plus $\circ$ est commutative,

$\boxed{\text{Alors}}$ $(A, +, \circ)$ est un anneau commutatif

exemples :

. $(\mathbb{C}, +, \circ)$ est un anneau commutatif

Il en est de même pour $(\mathbb{R}, +, \circ)$, $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ et $(\mathbb{Q}, +, \circ)$

2°) Sous-anneau

Définition : Soit $(A, +, \circ)$ un anneau et soit $B \in \mathcal{P}(A)$

$(B, +, \circ)$ est un sous-anneau de $(A, +, \circ)$

$\boxed{\text{Si}}$ $\begin{cases} B \text{ sous groupe de } A \\ \forall (x, y) \in B^2 \quad xy \in B \text{ (B stable pour } \circ) \\ 1_A \in B \end{cases}$

$\boxed{\text{Si}}$ $\begin{cases} \forall (x, y) \in B^2 \quad x - y \in B \\ \forall (x, y) \in B^2 \quad x \circ y \in B \\ 1_A \in B \end{cases}$ CARACTÉRISATION

Remarque : 0_A est l'élément neutre de $+$ et 1_A l'élément neutre de $\circ$

4°/ Anneaux intègres

Définition

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau, soit $a \in A$

1/ a est un diviseur de zéro à gauche dans A

ssi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \exists b \in A,\ b \neq 0 \text{ et } ab = 0 \end{cases}$

2/ a est un diviseur de zéro à droite dans A

ssi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \exists b \in A,\ b \neq 0 \text{ et } ba = 0 \end{cases}$

3/ a est un diviseur de zéro dans A

si a est un diviseur de zéro à gauche ou à droite dans A

Exemple : $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation de congruence modulo 6 dans $\mathbb{Z}$

on a $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}\}$

$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau et on a

$\dot{2} \cdot \dot{3} = \dot{6} = \dot{0}$

$\dot{3} \cdot \dot{4} = \dot{12} = \dot{0}$

donc $\dot{2}$, $\dot{3}$ et $\dot{4}$ sont des diviseurs de zéro.

En revanche, $\dot{0}$, $\dot{1}$ et $\dot{5}$ ne sont pas des diviseurs de zéro

Définition :

Un anneau $(A, +, \cdot)$ est intègre

ssi $\begin{cases} (A, +, \cdot) \text{ est commutatif} \\ A \text{ n'admet aucun diviseur de } 0 \\ A \neq \{0\} \end{cases}$

exemples :
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau intègre
- $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +, \cdot)$ n'est pas un anneau intègre

3°) Calculs dans un anneau

Les calculs dans un anneau découlent directement des propriétés des 2 lois internes.

Les formules de calcul suivantes se démontrent aisément

1) $\forall x \in A$, $0.x = x.0 = 0$ (0 est un élément absorbant pour .)

Dem : $0.x = (0+0).x$
$\Leftrightarrow 0.x = 0.x + 0.x$
$\Leftrightarrow 0 = 0.x$

2) $\forall x \in A$ $(-1_A).x = -x = x.(-1_A)$

3) $\forall x, y \in A$ $\begin{cases} (-x)y = x(-y) = -xy \\ (-x)(-y) = xy \end{cases}$

4) $\forall (x,y,z) \in A^3$ $\begin{cases} (x-y).z = xz - yz \\ z(x-y) = zx - zy \end{cases}$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall a \in A$,

$$(1-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right)(1-a) = 1-a^n$$

6) $\forall a \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A^n$

$$\sum_{i=1}^{n} a x_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{et} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a = \sum_{i=1}^{n} x_i a$$

Notation : $nx = \begin{cases} x + x + \dots + x \ (n \text{ termes}) & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ -(-n)x & \text{si } n \in \mathbb{Z}^*_- \end{cases}$

7) $\forall n, p \in \mathbb{Z}^2$ $\forall x \in A$ $(n+p)x = nx + px$

8) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in A$ $n(-x) = (-n)x = -(nx)$ noté $-nx$

9) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall (x,y) \in A^2$ $\begin{cases} n(x+y) = nx + ny \\ n(x-y) = nx - ny \end{cases}$

10) $\forall n, p \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in A$ $(np)x = n(px)$

11) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall x, y \in A$ $n(xy) = (nx)y = x(ny)$

12) Formule du binôme de Newton pour $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in A$ tels que $xy = yx$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \left(\binom{n}{k} = C_n^k\right)$$

III Les corps et les sous-corps

Définition :

Un ensemble K muni de 2 lois internes $+$ et $\circ$ est un corps

ssi $\begin{cases} (K, +, \circ) \text{ est un anneau} \\ 0_K \neq 1_K \\ \text{Tout élément de } K - \{0\} \text{ admet un symétrique pour } \circ \end{cases}$

Si de plus, $\circ$ est commutative,

Alors $(K, +, \circ)$ est un corps commutatif

exemples :

- $(\mathbb{Q}, +, \circ)$, $(\mathbb{R}, +, \circ)$, $(\mathbb{C}, +, \circ)$ sont des corps
- $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ n'est pas un corps car les éléments non nuls ne possèdent pas de symétrique pour $\circ$.

Définition :

Soit $(K, +, \circ)$ un corps. Soit $L \in \mathcal{P}(K)$

L est un sous-corps de K

ssi $\begin{cases} L \text{ est un sous-anneau de } K \\ \forall x \in L - \{0\} \quad x^{-1} \in L \end{cases}$

ssi $\begin{cases} \forall (x, y) \in L^2 \quad x - y \in L \\ \forall (x, y) \in L^2 \quad x \circ y \in L \\ 1_K \in L \\ \forall x \in L - \{0\} \quad x^{-1} \in L \end{cases}$ CARACTÉRISATION

Remarque : Un corps est un anneau intègre

Attention, la réciproque est fausse

En effet : $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ est un anneau intègre mais ce n'est pas un corps

Rq : La structure de corps est essentielle pour la construction des espaces vectoriels