ex 59 p. 175

1°) $\vec{AB}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix}-8\\4\end{pmatrix}$

On calcule les longueurs des 3 côtés du triangle

$AB = \sqrt{6^2+2^2} = \sqrt{40}$

$AC = \sqrt{(-2)^2+6^2} = \sqrt{40}$

$BC = \sqrt{(-8)^2+4^2} = \sqrt{80}$

On a $AB = AC$ donc ABC est isocèle en A.

Pour montrer qu'il est rectangle on utilise la réciproque de Pythagore :

$AB^2 + AC^2 = \sqrt{40}^2 + \sqrt{40}^2 = 40+40 = 80$

$BC^2 = \sqrt{80}^2 = 80$

on a donc $AB^2 + AC^2 = BC^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

2°) On sait déjà que ABCD possède 2 côtés consécutifs égaux et un angle droit. Il ne reste plus qu'une propriété de parallélogramme pour en faire un carré.

ABCD est un carré

$\Rightarrow$ ABCD est un parallélogramme

$\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 1 - x_D \\ 2 = 8 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 - 6 = -5 \\ y_D = 8 - 2 = 6 \end{cases}$

Conclusion : $D(-5\,;6)$

exercice 64 p.175

1°) La médiatrice de [AB] est l'ensemble des points équidistants de A et de B
on calcule donc les distances DA et DB

$\vec{DA}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$ $\vec{DB}\begin{pmatrix}1\\-7\end{pmatrix}$ $DA=\sqrt{(-7)^2+1^2}=\sqrt{50}$

$DB=\sqrt{1^2+(-7)^2}=\sqrt{50}$

Conclusion : D est bien sur la médiatrice de [AB]

2°) Conjecture : Il semble que ABC soit isocèle en C.

$\vec{AC}\begin{pmatrix}12\\4\end{pmatrix}$ $\vec{BC}\begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$ donc $AC=\sqrt{12^2+4^2}=\sqrt{160}$ ABC est bien

$BC=\sqrt{4^2+12^2}=\sqrt{160}$ isocèle en A

3°) C et D sont donc 2 points de la médiatrice de [AB]
autrement dit (CD) est la médiatrice de [AB] donc perpendiculaire
à [AB] (2ème définition de la médiatrice : perpendiculaire qui passe par le milieu)

4°) $\dfrac{x_C+x_E}{2}=\dfrac{8+0}{2}=4\neq x_D$ Donc D n'est pas le milieu

$\dfrac{y_C+y_E}{2}=\dfrac{6-2}{2}=2\neq y_D$ de [EC]

5°) Pour cette dernière question, il faut vérifier que E est le milieu de [AB]

$\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-4+4}{2}=0=x_E$

$\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{2-6}{2}=-2=y_E$ E est donc le milieu de [AB]

donc EC est la hauteur / médiane / médiatrice / bissectrice de ABC

$\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{1}{2}$ base × hauteur

$=\dfrac{1}{2}AB\times EC$ $\vec{EC}\begin{pmatrix}8\\8\end{pmatrix}$ donc $EC=\sqrt{8^2+8^2}=\sqrt{128}$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{128}\times\sqrt{128}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}$ donc $AB=\sqrt{8^2+(-8)^2}=\sqrt{128}$

$=64$ unités d'aire

Ex 67 p. 176 On prendra $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

1°) $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$ $\boxed{\text{FAUX}}$

$\det(\vec{v},\vec{u}) = \begin{vmatrix} x' & x \\ y' & y \end{vmatrix} = x'y - y'x = -\det(\vec{u},\vec{v})$

2°) $\det(2\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2x & x' \\ 2y & y' \end{vmatrix} = 2xy' - 2yx' = 2(xy' - yx')$

$= 2\det(\vec{u},\vec{v})$ $\boxed{\text{VRAI}}$

3°) $\det(\vec{u},k\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & kx' \\ y & ky' \end{vmatrix} = kxy' - kyx' = k(xy' - yx')$

$= k\det(\vec{u},\vec{v})$ $\boxed{\text{VRAI}}$

4°) $\det(\vec{u}+\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x+x' & x'' \\ y+y' & y'' \end{vmatrix}$ On prend $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$

$= (x+x')y'' - (y+y')x''$

$= xy'' + x'y'' - yx'' - y'x''$

$= \boxed{(xy'' - yx'') + (x'y'' - y'x'')}$

D'autre part

$\det(\vec{u},\vec{w}) + \det(\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x'' \\ y & y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$

$\boxed{\text{VRAI}}$

$= \boxed{xy'' - yx'' + x'y'' - y'x''}$