II) Calcul des probabilités

1°) Théorèmes fondamentaux

Théorème 1 : La somme des probabilités des évènements élémentaires est égale à 1

Théorème 2 : La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des évènements élémentaires qui le composent.

Rq : Ces 2 théorèmes permettent de calculer toutes les probabilités mais leur utilisation reste fastidieuse donc il faudra trouver des méthodes plus performantes.

Exemple : Avec notre dé cubique, on note $p_1, p_2, \dots, p_6$ les probabilités élémentaires ($p_1 = p(\{1\}) \dots$)

Le théorème 1 se traduit par $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

Le théorème 2 s'applique pour calculer par exple la probabilité de l'évènement $A = \{2, 4, 6\}$:

On a donc $p(A) = p_2 + p_4 + p_6$

2°) Exercice type

On lance un dé pipé (truqué) tel que les faces de 1 à 5 ont la même probabilité et la face 6 a 6 fois plus de chance de sortir. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Soit A : " obtenir un nombre pair "

Avec les notations précédentes, on a $p(A) = p_2 + p_4 + p_6$ (théorème 2)

Encore faut-il connaître les valeurs de p_2 p_4 et p_6.

On sait d'après l'énoncé que $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$

et que $p_6 = 6p_1$ (ou $6p_2$ ou $6p_3 \dots$)

On utilise maintenant le <u>théorème 1</u>

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$$

$$\Leftrightarrow p_1 + p_1 + p_1 + p_1 + p_1 + 6p_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 11\, p_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow p_1 = \frac{1}{11} = p_2 = p_3 = p_4 = p_5$$

donc $p_6 = 6\,p_1 = \dfrac{6}{11}$

<u>Conclusion</u> : $p(A) = p_2 + p_4 + p_6$

$$= \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{6}{11} = \frac{8}{11}$$

<u>3°) Une situation particulière : L'ÉQUIPROBABILITÉ</u>

<u>Def</u> : On est dans une situation d'équiprobabilité lorsque toutes les probabilités des évènements élémentaires sont égales

<u>Rq</u> : Une situation d'équiprobabilité est repérable facilement grâce au texte :

<u>exples</u> :
- On choisit au hasard un élève dans une classe
- On lance un dé parfaitement équilibré
- Les boules ou les cartes sont indiscernables au toucher

<u>Propriété 1</u> : Dans une situation d'équiprobabilité, si on a n issues alors chaque probabilité élémentaire est égale à $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{card(\Omega)}$

La démonstration est triviale avec le théorème 1

<u>Propriété 2</u> : Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

exemple : On tire une carte au hasard dans 1 jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir un coeur ?

Il y a équiprobabilité donc

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

(Il y a 8 cartes de coeur dans 1 jeu de 32 cartes)

Rq : Cette formule s'apparente au calcul de fréquence que nous avons vu dans le chapitre de statistiques puisqu'on a $f = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}} = \frac{8}{32}$ pour les coeurs.

Il y a donc une relation très étroite entre les statistiques et les probabilités.

4°) Différence entre probabilités et statistique

- Les statistiques constituent une branche expérimentale des mathématiques.
  On effectue l'expérience aléatoire un grand nombre de fois pour obtenir une série statistique. A partir de ces résultats, on calcule les différents paramètres en commençant par les fréquences.

- Les probabilités constituent une branche théorique des mathématiques.
  On n'effectue jamais l'expérience aléatoire mais on essaie d'en prévoir les résultats en calculant les probabilités en utilisant des modèles mathématiques (comme l'équiprobabilité par exemple).

Conséquences :

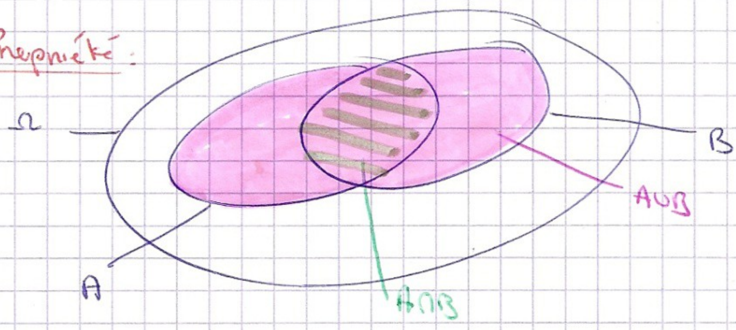
- Les statistiques viendront confirmer ou valider le modèle mathématique choisi :

si les écarts obtenus sont trop importants par rapport au modèle et aux prévisions des probas, alors on rejettera l'hypothèse de départ.

- Une probabilité peut et doit toujours s'interpréter comme une fréquence statistique.

5°) Probabilité d'une réunion.

Propriété :



$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Rq : ⊛ Il y a 4 valeurs dans cette formule. Il suffit d'en connaître 3 pour pouvoir calculer la 4ème

par exemple : $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B)$

ou encore $p(A) = p(A \cup B) + p(A \cap B) - p(B)$

⊛ si A et B sont incompatibles alors $p(A \cap B) = p(\emptyset) = 0$

on obtient alors une formule simplifiée :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Je vous déconseille très fortement de l'utiliser. Passez toujours par la propriété d'origine

6°) Probabilité de l'événement contraire

On sait que $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$

En appliquant la formule précédente on obtient :

$$p(A \cup \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A}) - p(A \cap \bar{A})$$

$$\Leftrightarrow \quad p(\Omega) = p(A) + p(\bar{A}) - p(\emptyset)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = p(A) + p(\bar{A})$$

D'où la propriété :

Prop : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$