I) Arithmétique

L'arithmétique est une branche des mathématiques consacrée à l'étude des nombres.

Tout d'abord limitée aux nombres entiers et rationnels sous la forme d'une fraction de 2 entiers, elle s'est ensuite élargie aux autres ensembles de nombres.

1) Multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$

Def: Soient a et b deux entiers relatifs avec $b \neq 0$

b est un diviseur de a (ou a est un multiple de b)

si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kb$

exples: • $14 = 2 \times 7$ $\Leftrightarrow$ 14 est un multiple de 7

$\Leftrightarrow$ 2 est un diviseur de 14 etc...

• $-45 = 5 \times (-9)$ -45 est donc un multiple de -9

mais aussi de 5

Rq: • 1 est un diviseur de tous les entiers relatifs $a = 1 \times a$

• 0 est un multiple de tous les entiers relatifs $0 = 0 \times a$

Propriété: si m et n sont multiples de a

alors $m+n$, $m-n$ et $m \times n$ sont aussi multiples de a

Demonstration: m et n sont des multiples de a donc il peuvent s'écrire $m = ka$ et $n = k'a$ où $k, k' \in \mathbb{Z}$

on a alors $m+n = ka + k'a = (k+k')a \Rightarrow$ multiple de a

$m-n = ka - k'a = (k-k')a \Rightarrow$ multiple de a

$m \times n = ka \times k'a = kk'a^2 = (kk'a) \times a \Rightarrow$ multiple de a

ATTENTION La réciproque est fausse

$12 = 4 \times 3$ 12 est un multiple de 6, ce qui n'est pas le cas de 4 et de 3

2°) Les nombres premiers

Définition : Un entier naturel n est premier

ssi il possède exactement 2 diviseurs positif : 1 et lui-même

Cspce : 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur positif

Exple : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ... sont des nombres premiers

Vocabulaire : Un nombre qui n'est pas premier est dit "composé"

exple : $12 = 4 \times 3$ est un nombre composé

En fait tout nombre qui possède un diviseur positif autre que 1 ou lui-même est composé

Il existe plusieurs sortes de cribles pour trouver les nombres premiers : le crible de Matiyasevich que l'on a vu avec la fonction connexe.

En voici un autre : le crible d'Eratosthène qui donne les nombres premiers jusqu'à 100.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	~~29~~	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	46	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	~~53~~	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	~~59~~	~~60~~
~~61~~	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	~~67~~	~~68~~	~~69~~	~~70~~
~~71~~	~~72~~	~~73~~	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	~~79~~	~~80~~
~~81~~	~~82~~	~~83~~	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	~~89~~	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	~~97~~	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Principe : 2 est le tout premier nombre premier donc tous ses multiples ne le sont pas.

On raye donc tous les multiples de 2.

Le premier nombre qui n'est pas rayé est alors obligatoirement premier.

On répète le procédé jusqu'à avoir rayé tous les nombres composés

Propriété admise Il y a une infinité de nombres premiers

3°) Décomposition en facteurs premiers

Propriété : Tout entier supérieur ou égal à 2 peut se décomposer en produit de facteurs premiers

exemples : Décomposons 84 et 396 en produit de facteurs premiers

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

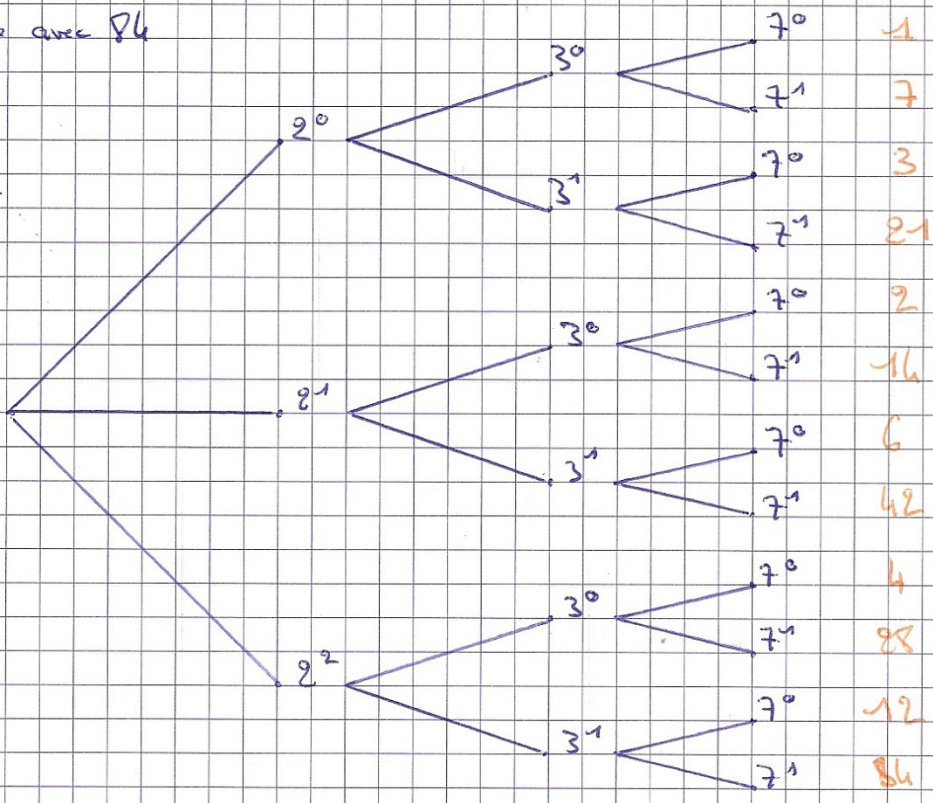
$84 = 2^2 \times 3^1 \times 7^1$

396	3
132	2
66	11
6	3
2	2
1	

$396 = 2^2 \times 3^2 \times 11^1$

Conséquence 1 : Trouver tous les diviseurs positifs d'un nombre et savoir combien il y en a

expl° avec 84



Il y a 3 × 2 × 2 = 12 diviseurs

$396 = 2^2 \times 3^2 \times 11^1$ possède $3 \times 3 \times 2 = 18$ diviseurs

Conséquence 2 : Ecrire une fraction sous forme irréductible

$$\frac{396}{84} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 11}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{3 \times 11}{7} = \frac{33}{7}$$