II Etude des variations et du signe de la fonction carrée.

1°) Sens de variation.

Rappels :

- Une fonction croissante CONSERVE l'ordre entre les antécédents et leurs images : si $x_1 < x_2$ Alors $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- Une fonction décroissante INVERSE l'ordre entre les antécédents et leurs images : si $x_1 < x_2$ Alors $f(x_1) \geq f(x_2)$

Etude des variations de la fonction carrée sur $[0, +\infty[$

Soient x_1 et x_2 deux réels de $[0, +\infty[$ tels que $0 \leq x_1 < x_2$ (1)

On veut comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$

donc on étudie le signe de la différence $f(x_1) - f(x_2)$

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

On étudie séparément le signe de chacun des facteurs.

Pour $x_1 - x_2$	Pour $x_1 + x_2$
on a $x_1 < x_2$	$x_1 \geq 0$
$\Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$	$x_2 > 0$
$(x_1 - x_2)$ est négatif	$x_1 + x_2 > 0$
	$(x_1 + x_2)$ est positif

on ajoute membre à membre 2 inégalités de même sens

donc $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0$ ("−" par "+")

$\Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$

$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (2)

Conclusion : D'après (1) et (2) les images et les antécédents sont rangés dans le même ordre

f est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$

Etude des variations sur $]-\infty ; 0]$

Soient x_1 et x_2 deux réels tels que (1) $x_1 \leq x_2 \leq 0$

On étudie le signe de $f(x_1) - f(x_2)$

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

On étudie séparément le signe de chacun des facteurs

Pour $(x_1 - x_2)$

on a $x_1 < x_2$

$\Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$

$(x_1 - x_2)$ est négatif

Pour $(x_1 + x_2)$

$x_1 < 0$

$x_2 \leq 0$

$x_1 + x_2 < 0$

$(x_1 + x_2)$ est négatif

donc $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$ ("$-$" par "$-$")

$\Leftrightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0$

$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (2)

Conclusion : D'après (1) et (2) f est strictement décroissant, sur $]-\infty ; 0]$

D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	↘	0	↗

Remarque : Cette étude des variations d'une fonction est la seule que l'on peut utiliser en seconde mais elle est longue

$\hookrightarrow$ nécessité d'avoir une méthode plus rapide en classe de 1ère

2°) Signe de la fonction carré

Méthode : On utilise le tableau de variation pour en faire une lecture graphique et ainsi déterminer le tableau de signes de la fonction.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	↘		0		↗
signe de $f(x)$		$+$	0	$+$	