

II. Etude des variations et du signe de la fonction carrée.

1) Sens de variation.

Rappels:

- Une fonction **croissante** **CONSERVE** l'ordre entre les antécédents et leurs images : **Si** $n_1 < n_2$ **Alors** $f(n_1) \leq f(n_2)$,
- Une fonction **décroissante** **INVERSE** l'ordre entre les antécédents et leurs images : **Si** $n_1 < n_2$ **Alors** $f(n_1) \geq f(n_2)$

Etude des variations de la fonction carrée sur $[0, +\infty[$

Soient n_1 et n_2 deux réels de $[0, +\infty[$ tels que $0 \leq n_1 < n_2$ (1)

On veut comparer $f(n_1)$ et $f(n_2)$

donc on étudie le signe de la différence $f(n_1) - f(n_2)$

$$\begin{aligned} f(n_1) - f(n_2) &= n_1^2 - n_2^2 && a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ &= (n_1 - n_2)(n_1 + n_2) \end{aligned}$$

On étudie séparément le signe de chacun des facteurs.

Pour $n_1 - n_2$
on a $n_1 < n_2$
 $\Leftrightarrow n_1 - n_2 < 0$
 $(n_1 - n_2)$ est négatif

Pour $n_1 + n_2$
 $n_1 \geq 0$
 $n_2 > 0$
 $n_1 + n_2 > 0$
on ajoute
membre à membre
2 inégalités de
même sens

$(n_1 + n_2)$ est positif

donc $(n_1 - n_2)(n_1 + n_2) < 0$ ("-" par "+")

$\Leftrightarrow f(n_1) - f(n_2) < 0$

$\Leftrightarrow f(n_1) < f(n_2)$ (2)

Conclusion: D'après (1) et (2) les images et les antécédents sont rangés dans le même ordre

f est donc strictement croissante sur $[0, +\infty[$

Etude des variations sur $]-\infty; 0]$

Soient x_1 et x_2 deux réels tels que (1) $x_1 \leq x_2 \leq 0$
On étudie le signe de $f(x_1) - f(x_2)$

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

On étudie séparément le signe de chacun des facteurs

Pour $(x_1 - x_2)$

on a $x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$$

$(x_1 - x_2)$ est négatif

Pour $(x_1 + x_2)$

$$x_1 < 0$$

$$x_2 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 < 0$$

$(x_1 + x_2)$ est négatif

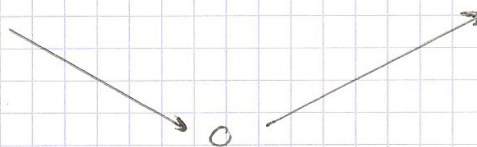
$$\text{donc } (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0 \quad (\text{"-"} \text{ par "-"})$$

$$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) > 0$$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (2)$$

Conclusion: D'après (1) et (2) f est strictement décroissant,
sur $]-\infty; 0]$

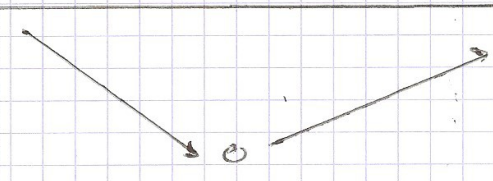
D'où le tableau de variation:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f			

Remarque: Cette étude des variations d'une fonction est la seule que l'on peut utiliser en seconde mais elle est longue. La nécessité d'avoir une méthode plus rapide en classe de première.

2°) Signe de la fonction canne

Méthode: On utilise le tableau de variation pour en faire une lecture graphique et ainsi déterminer le tableau des signes de la fonction.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de f			
signe de $f(x)$	$+$	0	$+$