LE CRIBLE DE MATIIASSEVITCH

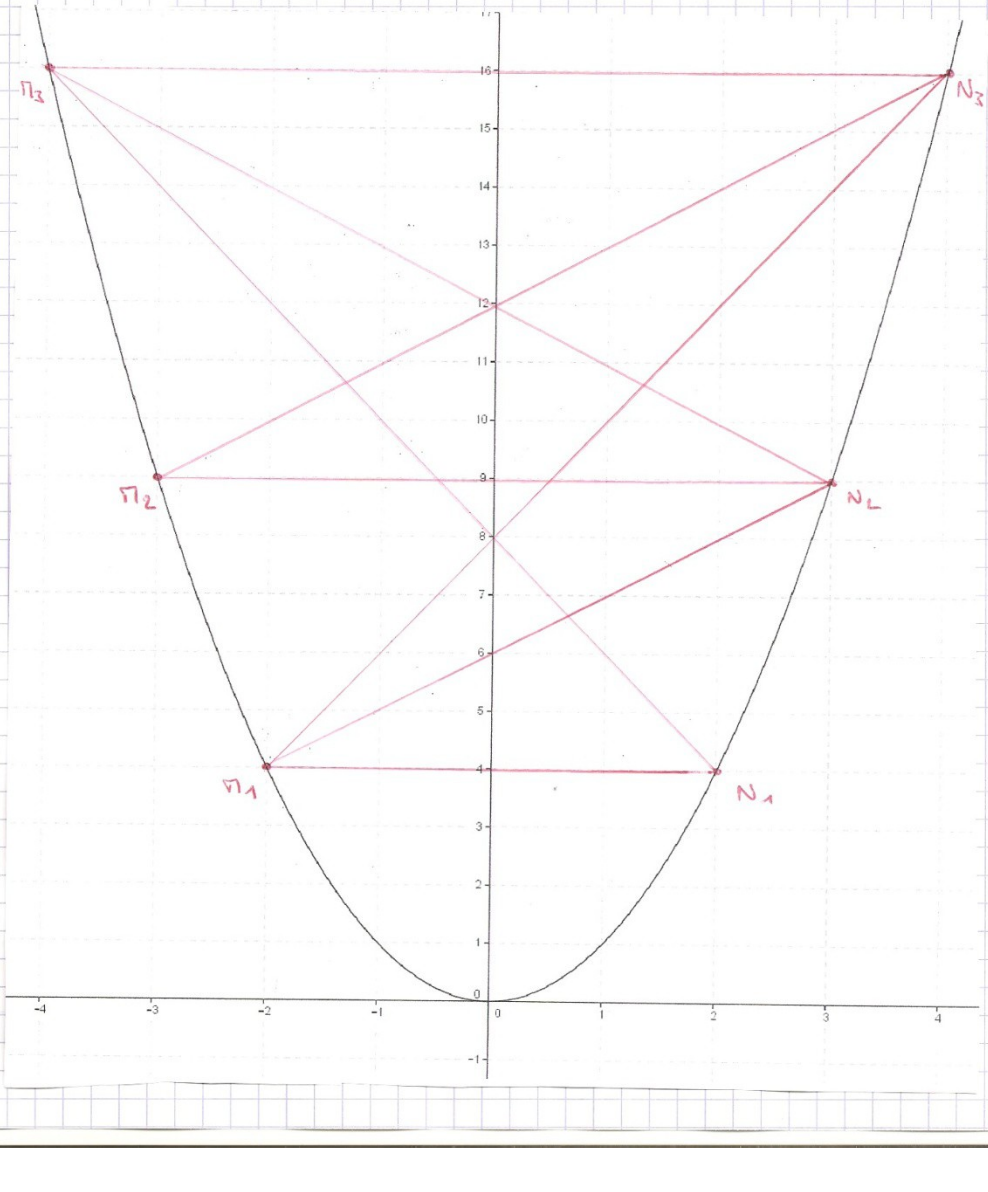
Définition : Un nombre premier est un entier positif qui possède exactement 2 diviseurs positifs : 1 et lui-même

exple : • 2, 3, 5, 7, 11, 13 ... sont premiers

• 1 n'est pas premier (il ne possède qu'un seul diviseur positif)

• -2 n'est pas premier. On parle d'entiers positifs

On va utiliser la parabole représentative de la fonction carré pour trouver graphiquement les nombres premiers



Exercice : Le crible de **Matiiassevitch**

On considère la parabole représentative de la fonction carrée.

1. **Graphiquement** : Placer les points $M_1, M_2, M_3, N_1, N_2, N_3$ de la parabole d'abscisses respectives -2, -3, -4, 2, 3, et 4.
   Tracer les segments $[M_1N_1]$, $[M_1N_2]$, $[M_1N_3]$, $[M_2N_1]$, $[M_2N_2]$, $[M_2N_3]$, $[M_3N_1]$, $[M_3N_2]$, $[M_3N_3]$
   Ces segments coupent ils l'axe des ordonnées sur des nombres premiers ?
   Remplir le tableau suivant :

segment	$[M_1N_1]$,	$[M_1N_2]$,	$[M_1N_3]$,	$[M_2N_1]$,	$[M_2N_2]$,	$[M_2N_3]$,	$[M_3N_1]$,	$[M_3N_2]$,	$[M_3N_3]$,
Abscisse de M_i	-2	-2	-2	-3	-3	-3	-4	-4	-4
Abscisse de N_i	2	3	4	2	3	4	2	3	4
Ordonnée du point d'intersection	4	6	8	6	9	12	8	12	16

   Emettre une conjecture.

Il semble que les différents segment. coupent l'axe des ordonnées à la valeur absolue du produit des abscisses des extrémités du segment.

2. **Etude d'un cas particulier avec M_1 et N_2**
   On a $M_1(-2, 4)$ et $N_2(3, 9)$
   Soit g la fonction affine définie par g(x) = ax + b et dont la représentation graphique est la droite (M_1N_2).
   a. Donner les valeurs de g(-2) et g(3).
   b. En déduire l'expression de g(x) en fonction de x.
   c. Le point I est le point d'intersection de la droite (M_1N_2).avec l'axe des ordonnées.
   Vérifier que l'ordonnée du point I est 2x3. Est-ce un nombre premier ?

a) $g(-2) = 4$ et $g(3) = 9$

b) g est une fonction affine donc $g(x) = ax + b$

avec $a = \dfrac{y_{N_2} - y_{M_1}}{x_{N_2} - x_{M_1}} = \dfrac{9 - 4}{3 - (-2)} = \dfrac{5}{5} = 1$

donc $g(x) = 1x + b$

De plus $g(-2) = 4 \Leftrightarrow 1 \times (-2) + b = 4 \Leftrightarrow -2 + b = 4 \Leftrightarrow b = 6$

Conclusion : $g(x) = 1x + 6$

c) L'ordonnée de I est l'ordonnée à l'origine de la fonction g

donc $y_I = 6 = 2 \times 3$

Ce n'est pas un nombre premier.

3. **Cas général** (pour les élèves qui souhaitent aller en spécialité maths)

M(-m, m²) et N(n, n²) sont deux points à coordonnées entières de la parabole (n et m sont des entiers naturels strictement supérieurs à 1) et I est le point d'intersection de (MN) avec l'axe des ordonnées.

(on remarque que l'abscisse de M est négative et celle de N est positive donc les 2 points sont situés chacun de part et d'autre de l'axe de symétrie de la parabole)

a. Déterminer l'expression de la fonction affine h dont la représentation graphique est la droite (MN) en fonction de m et de n.
b. Vérifier alors que l'ordonnée du point I est mxn

a) h est une fonction affine donc $h(x) = ax + b$

avec $a = \dfrac{y_N - y_M}{x_N - x_M} = \dfrac{n^2 - m^2}{n - (-m)}$

$= \dfrac{n^2 - m^2}{n+m} = \dfrac{(n-m)\cancel{(n+m)}}{\cancel{n+m}} = n - m$

donc $h(x) = (n-m)x + b$

De plus $N(n, n^2) \in C_h$

$\iff h(n) = n^2$

$\iff (n-m)n + b = n^2$

$\iff \cancel{n^2} - mn + b = \cancel{n^2}$

$\iff -mn + b = 0$

$\iff b = mn$

Conclusion : $h(x) = (n-m)x + mn$

b) L'ordonnée du point I est l'ordonnée à l'origine de la fonction h

$y_I = mn$ donc ce n'est pas un nombre premier