

III Propriétés algébriques de la fonction racine carrée

Propriété:

1. Pour tout réel positif a on a $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a}^2 = a$ et $\sqrt{a} \geq 0$

Démonstration: Conséquence directe de la définition

2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Démonstration: on utilise la propriété due à la stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$:

2 nombres **positifs** sont égaux ssi leurs carrés sont égaux

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{a \times b}^2 \stackrel{①}{=} ab \\ (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 \stackrel{②}{=} \sqrt{a}^2 \times \sqrt{b}^2 = ab \end{array} \right\} \text{d'où l'égalité}$$

exemple: $\sqrt{10} = \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{2} \times \sqrt{5}$

3. $\forall a \in \mathbb{R}^*$ $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

Démonstration

$$\begin{aligned} \frac{a}{a} = 1 &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{a}{a}} = \sqrt{1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a \times \frac{1}{a}} = 1 \\ \textcircled{2} &\Leftrightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{\frac{1}{a}} = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

exemple: $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

4. $\forall a \in \mathbb{R}$ $\forall b \in \mathbb{R}^*$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Démonstration

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \times \frac{1}{b}} \stackrel{②}{=} \sqrt{a} \times \sqrt{\frac{1}{b}} \stackrel{③}{=} \sqrt{a} \times \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

exemple: $\sqrt{3,5} = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

5. $\forall a \in \mathbb{R} \quad \sqrt{a^2} = |a|$

cas particulier : $\forall a \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{a^2} = a$

Démonstration : même principe qu pour la propriété 2

$$\begin{cases} \bullet \sqrt{a^2}^2 \stackrel{(1)}{=} a^2 \\ \bullet |a|^2 = a^2 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{d'où l'égalité} \end{array} \right.$$

Exemples :

• $3^2 = 9$ donc $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

• $(-3)^2 = 9$ donc $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$

6. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{a^2 b} = |a| \sqrt{b}$

Démonstration

$$\sqrt{a^2 b} \stackrel{(2)}{=} \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} \stackrel{(5)}{=} |a| \times \sqrt{b}$$

Exemples :

• $\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$

• $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$

• $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5}$

• $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3}$

Remarque : Cette dernière propriété est la plus importante et la plus utilisée de toutes

• En pratique, on applique toujours la propriété 6 avec $a \in \mathbb{R}_+$:

$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$