MÉTHODE ET RÉDACTION

CALCUL DES LIMITES D'UNE FONCTION

Propriété :
Pour calculer une limite, on fait preuve de bon sens avant tout et on respecte les 4 cas indéterminés qui sont

- "$\infty - \infty$"
- "$\frac{\infty}{\infty}$"
- "$0 \times \infty$"
- "$\frac{0}{0}$"

I Les cas indéterminés : "$\infty - \infty$", "$\frac{\infty}{\infty}$" et "$0 \times \infty$"

Rq : Ces cas indéterminés se rencontrent au voisinage de l'infini

MÉTHODE DE BASE

On modifie l'écriture de la fonction en mettant en facteur la fonction la plus forte.

On a $\ln x <<< x <<< x^2 <<< \dots <<< e^x <<< e^{2x} \dots$

$<<<$ se lit : " négligeable par rapport à "

Attention ceci n'est valable qu'au voisinage de $+\infty$

MÉTHODES COMPLÉMENTAIRES

- Quand on est dans un cas indéterminé au voisinage de l'infini, il faut toujours avoir à l'esprit les croissances comparées. Ce sont des limites remarquables à connaître

"$\frac{\infty}{\infty}$"
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty$

"$0 \times \infty$" $\to$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$

- Parfois il peut suffire de développer ou de décomposer une fraction

exemples:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \overbrace{e^x}^{\to 0} (\overbrace{x^2+3}^{\to +\infty}) = \lim\limits_{x \to -\infty} \overbrace{x^2 e^x}^{\to 0} + \overbrace{3e^x}^{\to 0} = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \overbrace{\dfrac{e^x}{x}}^{\to +\infty} - \dfrac{x}{x} = +\infty$

II Le cas indéterminé "$\frac{0}{0}$"

Rq: On le rencontre quand $x \to a$ $(a \in \mathbb{R})$, pas à l'infini

MÉTHODE 1

On factorise le numérateur $\boxed{\text{et}}$ le dénominateur par $(x-a)$

Attention: Ceci n'est faisable que si on a une fonction rationnelle. En effet a se trouve alors être une racine du numérateur et du dénominateur ce qui rend la factorisation possible car on travaille avec des polynômes

MÉTHODE 2

On écrit la fonction $f(x)$ sous la forme d'un taux de variation d'une fonction g dérivable en a

on a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x-a} = g'(a)$

Pour la fonction g, on peut prendre tout ce qui contient des x au numérateur ou encore la totalité du numérateur.

MÉTHODE 3

Penser à utiliser des limites remarquables démontrées dans le cours

- $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$
- $\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

etc...

III Un cas non indéterminé qui nécessite une étude de signe : le cas "$\frac{k}{0}$" avec $k \neq 0$

Ce cas n'est pas indéterminé car le bon sens indique que le résultat est $+\infty$ ou $-\infty$

↳ seul le signe reste à déterminer à l'aide de la règle des signes de la division.

↳ Il faut systématiquement étudier le signe du dénominateur (tableau de signes)

Si le signe du dénominateur change en a
Alors on distinguera la limite à gauche et la limite à droite.

Rq : Ce cas se rencontre aussi bien à l'infini qu'au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

IV COMPLÉMENTS

1°) Composition

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to a} u(x) = \ell \\ \lim_{X \to \ell} v(X) = \ell' \end{array}\right\} \text{ par composition } \lim_{x \to a} v[u(x)] = \ell'$$

2°) Théorèmes sur les limites

Le théorème de comparaison

$\boxed{\text{Si}}$ $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$

$\boxed{\text{Alors}}$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Ce théorème sert à montrer qu'une fonction tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Le théorème des gendarmes

$\boxed{\text{Si}}$ $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et que g et h ont même limite ℓ quand $x \to a$

$\boxed{\text{Alors}}$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Ce théorème sert à montrer qu'une fonction possède une limite finie

<u>Remarque</u> :

Contrairement aux suites numériques pour lesquelles ces théorèmes ne sont valable qu'au voisinage de $+\infty$, il sont valables également quand $x \to a$ ou quand $x \to -\infty$ pour les fonctions.