CALCUL INTÉGRAL 1

PRIMITIVES ET CALCUL D'AIRES

I Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

Remarque : Toutes les propriétés admises dans ce chapitre seront démontrées dans le chapitre : CALCUL INTÉGRAL 2

1°) Notion de primitive.

exemple : On considère la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 2x$

Du point de vue du vocabulaire, on a l'équivalence suivante :

$x \mapsto 2x$ est la dérivée de $x \mapsto x^2$

$\Leftrightarrow$ $x \mapsto x^2$ est une primitive de $x \mapsto 2x$

en effet, si on prend $g(x) = x^2 - \sqrt{3}$ on a alors $g'(x) = 2x$
donc g est aussi une primitive de la fonction $x \mapsto 2x$

ATTENTION : Il n'existe qu'une unique fonction dérivée et il existe une infinité de primitives

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I
la fonction F est une primitive de f sur I $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} F \text{ est dérivable sur } I \\ \forall x \in I \quad F'(x) = f(x) \end{cases}$

Remarque : On utilisera des minuscules pour la fonction de départ et des majuscules pour les primitives

propriété 1 (admise) : Toute fonction continue sur I possède des primitives sur I

propriété 2 : Toutes les primitives d'une fonction f continue sur un intervalle I sont définies à une constante additive près
Autrement dit : $\boxed{\text{Si}}$ F est une primitive de f sur I $\boxed{\text{Alors}}$ toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x)+k$ $k \in \mathbb{R}$

Propriété 3 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I
f admet une unique primitive F sur I qui vérifie la condition initiale $F(x_0) = y_0$ avec $x_0 \in I$

Démonstration :

- prop 1 : voir calcul intégral 2

- prop 2 :

_ Soit G une primitive connue de f sur I

On a $\forall x \in I \quad G'(x) = f(x)$

_ Soit F une autre primitive de f sur I

on a $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

_ Soit h la fonction définie sur I par

$\forall x \in I \quad h(x) = F(x) - G(x)$

h est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I

$$\forall x \in I \quad h'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Donc h est une fonction constante sur I

$\forall x \in I \quad h(x) = C \quad C \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow F(x) - G(x) = C \Leftrightarrow F(x) = G(x) + C$

- prop 3 :

Soit F une primitive de f sur I.

On sait que toutes les primitives de f sur I sont de la forme $G(x) = F(x) + C$

$G(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + C = y_0$

$\Leftrightarrow C = y_0 - F(x_0)$

On a une valeur unique de la constante d'où l'unicité de F

20) Primitive des fonctions de référence.

Fonction $f : f(x) =$	Une primitive $F : F(x) =$	sur l'intervalle $I = \dots$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
• $\cos x$; • $\sin x$	• $\sin(x)$; • $-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
a (constante)	ax	$\mathbb{R}$
• x^n $n \in \mathbb{N}^*$ • $x^n, n \in \mathbb{Z}, n \leqslant -2$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	• $\mathbb{R}$ si $n > 0$ • $]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$ si $n \leqslant -2$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0 ; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]-\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$

Remarques :

- Précision sur la dernière ligne du tableau

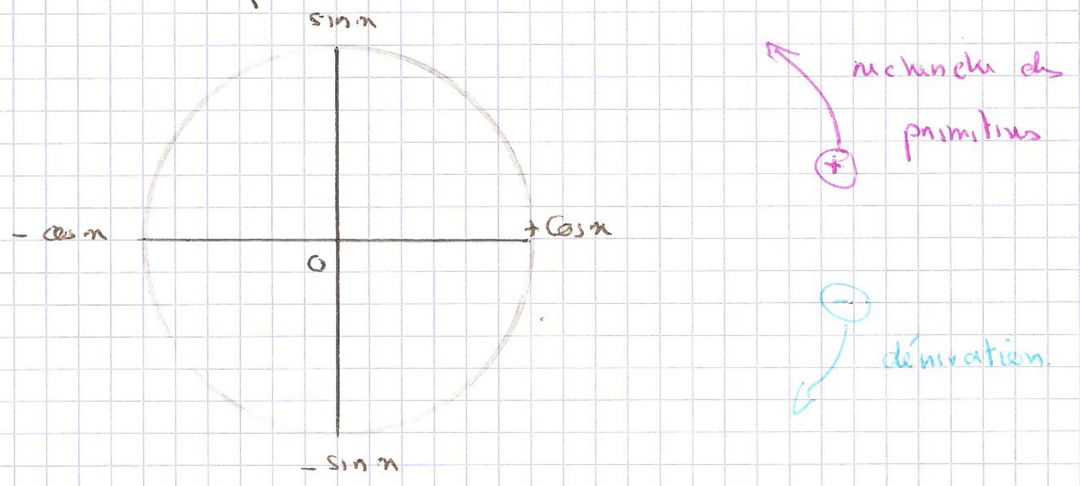
  sur $]0,+\infty[$ une primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ est $F(x) = \ln x$

  sur $]-\infty ; 0[$ une primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$ est $F(x) = \ln(-x)$

  Rappel : la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$

- Le tableau s'obtient par lecture inverse du tableau de dérivation de la classe de 1ère.

- Astuce pour les fonctions sinus et cosinus avec le cercle trigonométrique.



3°) Formules élémentaires de recherche de primitives

Par lecture inverse des formules de dérivation $(u+v)' = u' + v'$

et $(ku)' = ku'$

on obtient :

Propriété : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I

soient F et G des primitives respectives de f et de g

Soit $k \in \mathbb{R}$

1) Une primitive de $f+g$ est $F+G$

2) Une primitive de kf est kF

Comme pour la dérivation,

Les constantes multiplicatives sont conservées lorsqu'on recherche une primitive.

4°) Exercice type _ Différence entre UNE, LES ou LA primitive.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 5$

1°) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$

2°) Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$

3°) Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(6) = 0$

1°) Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est définie par

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 5x$$

2°) Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par

$$G(x) = F(x) + k = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 5x + k \quad k \in \mathbb{R}$$

3°) On a une condition initiale $F(6) = 0$

on sait que $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x + k$.

on a $F(6) = 0 \iff \frac{6^3}{3} + \frac{3 \times 6^2}{2} - 5 \times 6 + k = 0$

$\iff 72 + 54 - 30 + k = 0 \iff k = -96$

Conclusion : LA primitive F de f telle que $F(6) = 0$ est définie

par $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x - 96$.