5°) Formules de recherche de primitives avec rédaction

Fonction f de la forme…	Une primitive F :	Conditions
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	Si $n < -1$, $u(x) \neq 0$ pour tout x de I.
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout x de I.
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$	$u(x) > 0$ pour tout x de I ou $u(x) < 0$ pour tout x de I.
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout x de I.
$u'e^u$	e^u	
$(v'\circ u)\times u'$	$v\circ u$	v est une fonction dérivable sur J et $u(x) \in J$ pour tout $x \in I$.

Remarque : • les cinq premières formules sont des cas particuliers de la 6ème

• Cas particulier de la 1ère formule que l'on rencontre souvent si $n = 1$. Alors une primitive de $u'u$ est $\frac{u^2}{2}$

• On retrouve une valeur absolue dans la 3ème formule
↳ une étude de signe sera nécessaire.

Exemple type 1 : Déterminer une primitive de $f(x) = 3(2x-7)^5$ sur $\mathbb{R}$

Une primitive de $u'u^5$ est $\frac{u^6}{6}$

avec $u(x) = 2x-7$ donc $u'(x) = 2$

Une primitive de $\frac{3}{2} \times 2(2x-7)^5$ est $\frac{3}{2} \times \frac{(2x-7)^6}{6}$

Conclusion : Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est définie par
$$F(x) = \frac{(2x-7)^6}{4}$$

MÉTHODE GÉNÉRALE

1. On détermine quelle formule il faut utiliser et on l'écrit.
2. On identifie la fonction $u(x)$ (et éventuellement $v(x)$ pour la 6e formule)
3. On CALCULE $u'(x)$ (et éventuellement $v'(x)$)
4. On réécrit la formule en remplaçant u et u'
5. On détermine la constante de "ré-équilibrage"

Exemple type 2 : Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{5x}{(x^2+1)^4}$ sur $\mathbb{R}$

On remarque que $f(x) = 5x\,(x^2+1)^{-4}$

Une primitive de $u'u^n$ est $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$

Une primitive de $u'u^{-4}$ est $\dfrac{u^{-3}}{-3}$

avec $u(x) = x^2+1$ donc $u'(x) = 2x$

Une primitive de $\dfrac{5}{2} \times 2x\,(x^2+1)^{-4}$ est $\dfrac{5}{2} \times \dfrac{(x^2+1)^{-3}}{-3}$

Conclusion : une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est définie par

$$F(x) = -\frac{5}{6}(x^2+1)^{-3} = \frac{-5}{6(x^2+1)^3}$$

Exemple type 3 : Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{-5}{2x+1}$ sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$

Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\cancel{\ln u}$ ou $\ln(-u)$

avec $u(x) = 2x+1$ donc $u'(x) = 2$

et

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$	

$u(x) < 0$ sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$

Une primitive de $\dfrac{-5}{2} \times \dfrac{2}{2x+1}$ est $\dfrac{-5}{2} \times \ln\big(-(2x+1)\big)$

Conclusion : Une primitive de f sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$ est définie par $F(x) = -\dfrac{5}{2}\ln(-2x-1)$