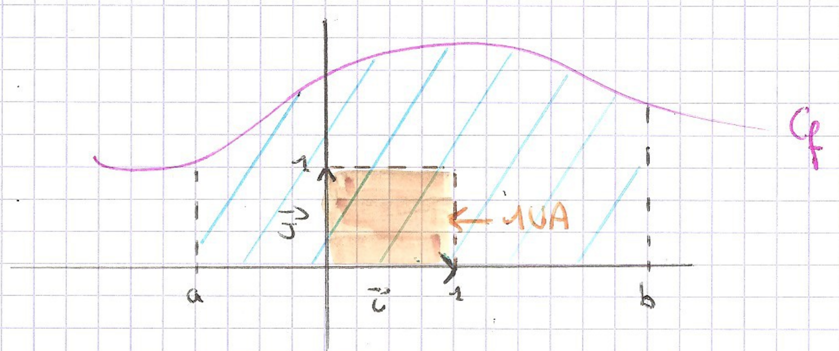
II Intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle I

1°) Définition et notations

Définition :

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle $[a,b]$

Soit C_f sa courbe représentative.



- L'intégrale de la fonction f sur $[a,b]$ est l'aire, en unités d'aires, du domaine du plan délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$
- Elle est notée $\int_a^b f(x)\,dx$ qui se lit : " intégrale de a à b de $f(x)\,dx$"
- L'unité d'aire est l'aire du rectangle de côté 1 dans un repère orthogonal

Remarques :

- Dans la notation, x est une variable muette
- On dit aussi qu'il s'agit de " l'aire sous la courbe" entre a et b
- Le domaine peut être défini avec des inégalités

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

- Dans le dessin de la définition on a 1UA (unité d'aire) = 2×1,5

$\iff$ 1UA = 3 cm²

2°) Calcul de l'intégrale d'une fonction continue positive

Propriété (admise provisoirement)

Soit f une fonction continue positive sur $[a,b]$

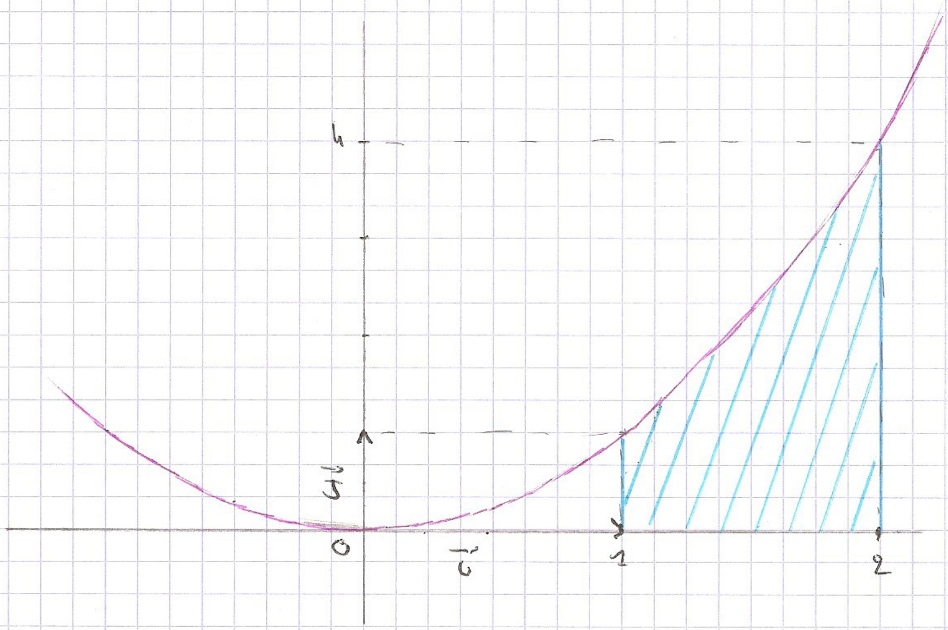
Soit F une primitive de f sur $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

notation

Exemple :

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{1^3}{3}\right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ UA}$$



$\int_1^2 x^2\,dx$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan délimité par C_f, $(O,\vec{i})$, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$

De plus on a $1 \text{ UA} = 4 \times 1{,}5 = 6 \text{ cm}^2$

donc l'aire du domaine hachuré est de

$$\frac{7}{3} \times 6 = 14 \text{ cm}^2$$