II Convexité et dérivée seconde.

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa fonction dérivée.

f est deux fois dérivable sur I ssi f' est dérivable sur I

La dérivée de f' est notée f'' et est appelée la dérivée seconde de f

Exemples :

- $f(x) = e^x$

  $f'(x) = e^x$

  $f''(x) = e^x$

- $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$

  $f'(x) = 6x + 5$

  $f''(x) = 6$

  $f'''(x) = 0$

Remarque :

f'' étant la dérivée de f', donc

LE SIGNE DE f'' DONNE LES VARIATIONS DE f'

Propriété :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I

Les quatre propositions suivantes sont équivalentes

1. f est convexe sur I (concave)
2. C_f est entièrement située au dessus de ses tangentes (en dessous)
3. f' est croissante sur I (décroissante)
4. f'' est positive sur I (négative)

Remarque :

- 1 et 2 sont équivalentes par définition
- 3 et 4 sont équivalentes car f'' est la dérivée de f'

Démonstration au programme de la spécialité

Si $f''(x) > 0$ Alors f est convexe

Soit $a \in I$

- La tangente T_a à C_f au point d'abscisse a a pour équation $\quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$

C_f a pour equation $\quad y = f(x)$

On veut montrer que f est convexe donc que C_f est au-dessus de ses tangentes

- Pour étudier la position relative de C_f et T_a, on étudie le signe de $d(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$

d est deux fois dérivable sur I comme somme de fonctions deux fois dérivables sur I et on a

$\forall x \in I \quad d'(x) = f'(x) - f'(a)$

et $d''(x) = f''(x) - 0 = f''(x)$

x		a	
signe de $d''(x)$		+	
variations de d'	↗	0	↗
signe de $d'(x)$	−	0	+
variations de d	↘	0	↗
signe de $d(x)$	+	0	+

on remarque que $d'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$

$d(a) = 0$

car on est au point de contact

<u>Conclusion</u> : C_f est au dessus de T_a

D'où la convexité.

Propriété :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I

Soit $a \in I$

C_f admet un point d'inflexion en a

$\boxed{\text{Ssi}}$ $f''(x)$ s'annule et change de signe en a

Démonstration :

si $f''(x)$ s'annule et change de signe alors f change de convexité en a.

Exercice type

Etudier la convexité de $f(x) = 3x^2 - 7x + 1 - 5e^x$ définie sur $\mathbb{R}$. Préciser les éventuels points d'inflexion.

Pour étudier la convexité de f on étudie le signe de $f''(x)$

f est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions 2 fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 6x - 7 - 5e^x$ et $f''(x) = 6 - 5e^x$

on résout $6 - 5e^x > 0$

$\iff -5e^x > -6$

$\iff e^x < \frac{6}{5}$

$\iff x < \ln\left(\frac{6}{5}\right)$

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{6}{5}\right)$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

Conclusion :
- f est convexe sur $]-\infty ; \ln\left(\frac{6}{5}\right)]$
- f est concave sur $[\ln\left(\frac{6}{5}\right) ; +\infty[$
- Il y a un point d'inflexion en $\ln\left(\frac{6}{5}\right)$

propriétés complémentaires (hors programme)

Soient f et g deux fonctions deux fois dérivables sur un intervalle I. Soit $k \in \mathbb{R}^*$

1. $\boxed{\text{Si}}$ f et g sont convexes sur I (concave)

Alors $f+g$ est convexe sur I (concave)

2. $\boxed{\text{Si}}$ $k > 0$ f et kf ont même convexité

$\boxed{\text{Si}}$ $k < 0$ f et kf sont de convexités contraires

Dem: 1. $(f+g)'' = f'' + g''$

2. $(kf)'' = k f''$