Application de la convexité _ exercice de synthèse.

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.
Lors de la repousse, on modélise la longueur, en centimètre, de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.
Cette longueur est modélisée par la fonction f, définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 10e^{u(x)}\,;$$

où u est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$u(x) = -e^{2-\frac{x}{10}}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Vérifier que, pour tout x positif, on a :

$$f'(x) = -u(x)e^{u(x)}.$$

En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

2. a. Calculer $f(20)$. En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

b. Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale. On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$. On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note f'' la fonction dérivée de f'. Enfin, on admet que :

$$f''(x) = \frac{1}{10}\,u(x)e^{u(x)}(1+u(x)).$$

a. Déterminer les variations de f' sur $[0\,;+\infty[$.

b. En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

1°) $\forall x \in [0,+\infty[$ $f(x) = 10 \times e^{u(x)}$

On sait que $(e^u)' = u'e^u$

donc $\forall x \in [0,+\infty[$

$f'(x) = 10 \times u'(x)e^{u(x)}$

or $u(x) = -e^{2-\frac{x}{10}}$

donc $u'(x) = -1 \times -\frac{1}{10}e^{2-\frac{x}{10}}$

$= \frac{1}{10}e^{2-\frac{x}{10}}$

$= -\frac{1}{10} \times -e^{2-\frac{x}{10}}$

$= -\frac{1}{10}\,u(x)$

On obtient donc

$f'(x) = 10 \times -\frac{1}{10}\,u(x)\,e^{u(x)}$

$= -u(x)\,e^{u(x)}$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$-u(x)$	$+$
$e^{u(x)}$	$+$
$f'(x)$	$+$
variations de f	$\nearrow$

2°) a) $f(20) = 10\, e^{-e^{2-\frac{20}{10}}}$

$= 10\, e^{-e^{0}} = 10\, e^{-1} = \frac{10}{e} \simeq 3{,}68$

Après 20 jours de repousse, on peut estimer la longueur de la queue du lézard à 37 mm

b) Il s'agit ici de calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

$f(x) = 10\, e^{-e^{2-\frac{x}{10}}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \frac{x}{10} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -e^{x} = 0$

par composition

$\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{2-\frac{x}{10}} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} 10e^{x} = 10$

par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 10$

Conclusion : la queue du lézard ne dépassera pas 10 cm

3°) a) Pour étudier les variations de $f'(x)$ on étudie le signe de

$f''(x) = \frac{1}{10} u(x) e^{u(x)} (1 + u(x))$

On résout $1 + u(x) > 0$

$\Leftrightarrow 1 - e^{2-\frac{x}{10}} > 0$

$\Leftrightarrow -e^{2-\frac{x}{10}} > -1$

$\Leftrightarrow e^{2-\frac{x}{10}} < 1$

$\Leftrightarrow 2 - \frac{x}{10} < \ln 1 \; (=0)$

$\Leftrightarrow -\frac{x}{10} < -2$

$\Leftrightarrow x > 20$

x	0	20	$+\infty$
$\frac{1}{10} u(x)$	$-$	|	$-$
$e^{u(x)}$	$+$	|	$+$
$1 + u(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
variations de f'	↗	$f'(20)$	↘

b) La vitesse de croissance de la queue du lézard est maximale au bout de 20 jours.