III Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ $a \in \mathbb{R}$

Elle s'écrit aussi $y' - ay = 0$

Vocabulaire : C'est une équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre à coefficients constants

Remarque : on dit aussi "sans second membre"

On cherche donc une fonction f dérivable telle que

$$f' = af \quad a \in \mathbb{R}$$

→ On connait déjà une solution à cette équation différentielle : $f(x) = e^{ax}$

en effet $f'(x) = ae^{ax} = af(x)$

→ soit g une solution de $y' = ay$ on a donc $g'(x) = ag(x)$

soit $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{g(x)}{e^{ax}}$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad h'(x) = \dfrac{g'(x)e^{ax} - g(x) \times ae^{ax}}{(e^{ax})^2}$

$$= \frac{ag(x)e^{ax} - ag(x)e^{ax}}{(e^{ax})^2} = 0$$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $h(x) = C \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{e^{ax}} = C \Leftrightarrow g(x) = Ce^{ax}$

Propriété : Les solutions de (E_0) : $y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{ax}$ $C \in \mathbb{R}$

La solution est unique si on rajoute une condition initiale $y(x_0) = y_0$

Démonstration : L'unicité s'obtient par calcul de la constante

Propriété : $\boxed{\text{Si}}$ y_1 et y_2 sont 2 solutions de $y' = ay$ a

$\boxed{\text{Alors}}$ $y_1 + y_2$ et $\forall k \in \mathbb{R}$, ky sont des solutions de $y' = ay$

exemple : Résoudre $y' - 5y = 0$ avec $y(0) = 2$

Les solutions de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$y(x) = C e^{5x}$ $C \in \mathbb{R}$ car $y' - 5y = 0$

$\Leftrightarrow y' = 5y$

De plus $y(0) = 2$

$\Leftrightarrow C e^{5 \times 0} = 2$

$\Leftrightarrow C e^{0} = 2$

$\Leftrightarrow C = 2$

Conclusion : La solution de E vérifiant $y(0) = 2$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = 2 e^{5x}$.