IV Résolution de $y' = ay + b$ et de $y' = ay + f$

1°) Résolution de $y' = ay + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ $(a \neq 0)$

Elle s'écrit aussi : $y' - ay = b$

Vocabulaire : c'est une équation différentielle linéaire, du 1er ordre à coefficients constants avec second membre

Ici on n'a pas de solution triviale a priori

→ Cherchons une éventuelle fonction constante $f(x) = k$ solution de cette équation

on a $f(x) = k$ et $f'(x) = 0$

f est solution de l'équation

$\iff f' = af + b \iff 0 = ka + b \iff -\frac{b}{a} = k$ cl : $f(x) = -\frac{b}{a}$ est solution de (E) : $y' = ay + b$

et a a $f' = af + b$

→ Soit g une solution de E.

$\iff g' = ag + b$

$\iff g' - f' = ag + \cancel{b} - (af + \cancel{b})$

$\iff g' - f' = ag - af$

$\iff (g - f)' = a(g - f)$ de la forme $y' = ay$

$\iff g - f$ est solution de (E_0) : $y' = ay$

$\iff \forall x \in \mathbb{R}$ $(g - f)(x) = Ce^{ax}$ $C \in \mathbb{R}$

$\iff g(x) = Ce^{ax} + f(x)$ $C \in \mathbb{R}$

$\iff g(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ $C \in \mathbb{R}$

Propriété : les solutions de (E) : $y' = ay + b$ sont définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ $C \in \mathbb{R}$

2°) <u>Résolution de</u> $y' = ay + f$ $\quad a \neq 0$

→ supposons qu'on l'on connaisse une solution particulière g de cette équation différentielle

→ On utilise le même raisonnement que pour $y' = ay + b$
On sait que $g'(x) = a g(x) + b$ car g est solution

y est solution de (E)

$\iff y' = ay + f$

$\iff y'(x) = a y(x) + f(x)$

$\iff y'(x) - g'(x) = ay(x) + f(x) - (ag(x) + f(x))$

$\iff y'(x) - g'(x) = ay(x) - ag(x)$

$\iff y' - g' = a(y - g)$

$\iff (y - g)' = a(y - g)$

$\iff y - g$ est solution de (E_0) : $y' = ay$

donc $(y - g)(x) = Ce^{ax}$ $\quad C \in \mathbb{R}$

$\iff y(x) = Ce^{ax} + g(x)$ $\quad C \in \mathbb{R}$

<u>Propriété</u> : Soit g une solution particulière de (E) : $y' = ay + f$ $a \neq 0$

y est une solution de (E)
$\iff y - g$ est solution de (E_0) : $y' = ay$

Les solutions de (E) sont donc définies par
$y(x) = Ce^{ax} + g(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$
où g est une solution particulière de (E)