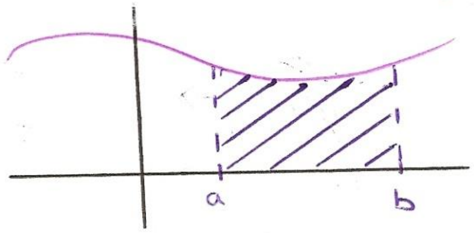
CALCUL INTEGRAL - PROPRIETE DES INTEGRALES

I Intégrale d'une fonction continue positive sur [a,b]

1°) Définition et premier résultat.

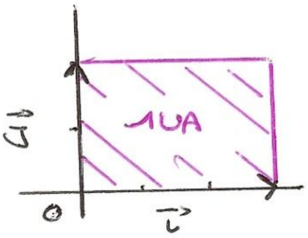
Déf: Soit f une fonction continue positive sur $[a,b]$
Soit C_f sa courbe représentative.



L'intégrale de la fonction f sur $[a,b]$ est l'aire, en unité d'aire du domaine du plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$

Elle est notée $\int_a^b f(x)\,dx$

Déf: Dans 1 repère orthogonal, l'unité d'aire est égale à l'aire du rectangle de côté 1



Remarque: sur ce dessin on a
$1UA = 3 \times 2 = 6\ cm^2$

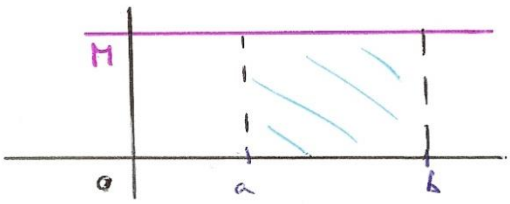
Remarques:

- le domaine du plan peut être formulé différemment : c'est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que
$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$
- $\int_a^b f(x)\,dx$ se lit : " intégrale de a à b de $f(x)\,dx$"
- x est une "variable muette" : elle n'a aucune signification et peut être remplacée par n'importe quelle autre lettre si besoin.
- On parle aussi de " l'aire sous la courbe"

prop : premier résultat

f est une fonction constante sur $[a,b]$ et positive

$f(x) = M \quad \forall x \in [a,b]$



$$\int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

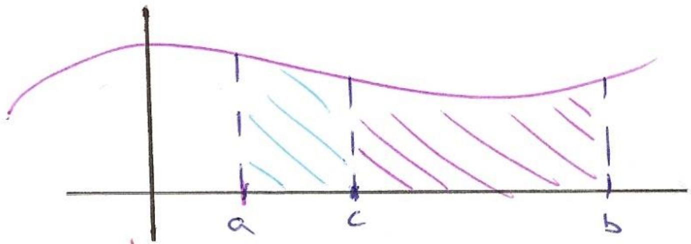
2°) Propriétés

prop 1 : positivité de l'intégrale.

si f est continue positive sur $[a,b]$ Alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

prop 2 : Relation de Chasles

Soit $c \in [a,b]$.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

prop 3 : linéarité de l'intégrale

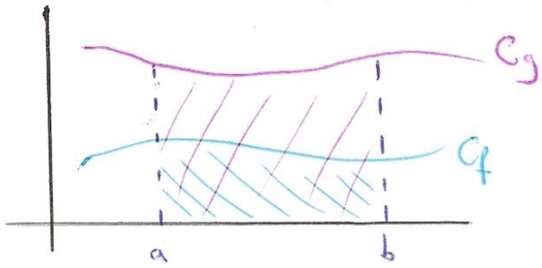
f et g sont 2 fonctions continues positives sur $[a,b]$

soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

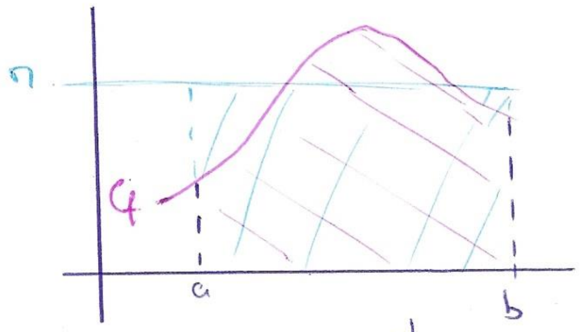
prop 4 : Intégrales et inégalités

Soient f et g 2 fonctions continues positives sur $[a,b]$ telles que $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq g(x)$



$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

prop 5 : valeur moyenne d'une fonction sur $[a,b]$.



On cherche une fonction constante dont l'intégrale est la même que celle de f.

on doit avoir $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \eta\,dx$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \eta(b-a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \eta$$

La valeur moyenne d'une fonction f continue positive sur $[a,b]$ est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu$

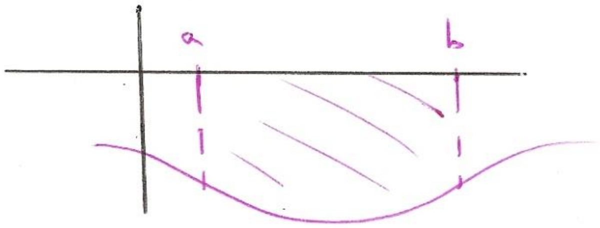
prop 6 : Inégalité de la moyenne.

Soit f une fonction continue positive et soient m et η 2 réels positifs tels que $\forall x \in [a,b]$ $m \leq f(x) \leq \eta$.

Alors on a $m \leq \mu \leq \eta$.

II Fonctions continues négatives sur [a, b]

Def: Soit f continue négative sur $[a,b]$ soit C_f sa courbe représentative



on a alors $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b -f(x)\,dx$$

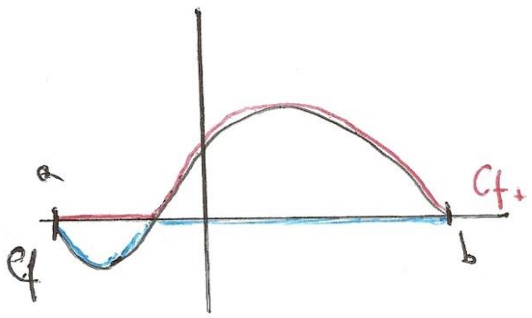
Conséquence: Dans ce cas l'intégrale est négative
on parle "d'aire négative" ou plutôt d'aire algébrique.

propriétés: On retrouve les même prop que pour les fonctions continues positives.

III fonction continue sur [a, b] et extension de la notation

1°) cas de fonctions continues

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.



on définit 2 fonctions f_+ et f_- tq $f_+(x) \geq 0$ sur $[a,b]$
et $f_-(x) \leq 0$ sur $[a,b]$

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) > 0 \\ f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

on a alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_+(x)\,dx + \int_a^b f_-(x)\,dx$$

Les propriétés restent les même.

2°) Extension de la notation

D'après Chasles

$$\int_a^a f(x)\,dx = \int_a^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^a f(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{-\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx}$$

A retenir : le fait d'inverser les bornes dans l'intégrales revient à changer le signe.