Exercice 1 p. 248

a) $\mathcal{A} = -\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ car la courbe est en dessous de l'axe des abscisses $(f(x) \leq 0)$

b) $\mathcal{A} = -\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

c) On est obligé de séparer l'aire des 2 domaines hachurés

$$\mathcal{A} = -\int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{1,5} f(x)\,dx$$

Attention : pas de relation de Chasles à cause du signe "–"

d) $\mathcal{A} = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx$

Ex 9 p. 248

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt$ est l'aire sous la courbe rouge entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

on a $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\quad \frac{2}{\pi}x \leq f(x) \leq x$.

1ère méthode : $\boxed{\text{graphiquement}}$

aire du triangle vert $\leq \mathcal{A} \leq$ aire du triangle bleu

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\frac{\pi}{2} \times 1}{2} \leq \mathcal{A} \leq \left(\frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2}\right) \times \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} \leq \mathcal{A} \leq \frac{\pi^2}{8}$$

$\mathcal{A}_{\text{triangle}} = \text{base} \times \text{hauteur} \times \frac{1}{2}$

2e méthode : $\boxed{\text{par le calcul}}$ en utilisant la propriété des intégrales avec les inégalités ET LES CONNAISSANCES DU 1er CHAPITRE AVEC CALCUL DE PRIMITIVE donc hors sujet à ce stade du chapitre

Méthode très importante à savoir mettre en œuvre

$$\frac{2}{\pi}x \leq f(x) \leq x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}x\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{2}{\pi} \times \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \mathcal{A} \leq \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi} \times \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - 0 \leq \mathcal{A} \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4} \leq \mathcal{A} \leq \frac{\pi^2}{8}$$

ex 13 p 249 Très important - utilise le calcul d'intégrale de fonctions constantes

a) D'après le tableau de variation.

$x \in [1,2]$ $\Longrightarrow$ l'intervalle de travail est donné par les bornes de l'intégrale

$\Rightarrow$ $0 \leq f(x) \leq 2$

simple implication

$\Leftrightarrow \int_1^2 0\,dx \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq \int_1^2 2\,dx$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq 2(2-1)$ (intégrale d'une fonction constante)

b) $x \in [2,5] \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 2$ d'après le tableau de variation

$\Leftrightarrow \int_2^5 1\,dx \leq \int_2^5 f(x)\,dx \leq \int_2^5 2\,dx$

$\Leftrightarrow 1(5-2) \leq \int_2^5 f(x)\,dx \leq 2(5-2)$

$\Leftrightarrow 3 \leq \int_2^5 f(x)\,dx \leq 6$

c) $x \in [1,3] \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 2$ d'après le tableau de variation

$\Leftrightarrow \int_1^3 0\,dx \leq \int_1^3 f(x)\,dx \leq \int_1^3 2\,dx$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^3 f(x)\,dx \leq 2(3-1)$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_1^3 f(x)\,dx \leq 4$

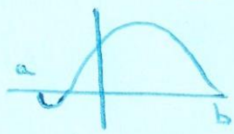
Ex 41 p.251 utilise la positivité (ou la négativité) de l'intégrale

Cet exercice revient à étudier le signe de la fonction sur l'intervalle donné par les bornes de l'intégrale. Attention aussi à l'ordre des bornes

a) $\forall x \in [-3;1]$ $x^2 > 0 \Rightarrow \int_{-3}^{1} x^2\,dx > 0$

b) $\forall x \in [0,10]$ $-3\sqrt{x} < 0 \Rightarrow \int_0^{10} -3\sqrt{x}\,dx < 0$

Attention, ici il n'y a pas d'équivalence :
on peut très bien avoir une intégrale positive / négative avec une fonction qui n'est pas de signe constant :



$\int_a^b f(x)\,dx > 0$
mais f n'est pas positive sur $[a,b]$

c) $\forall x \in [-2;0] \quad x^3 < 0 \Rightarrow \int_{-2}^{0} x^3\,dx \leqslant 0$

d) Attention les bornes sont "inversées"

$\forall x \in [\frac{1}{2};1] \quad \ln x < 0 \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x\,dx < 0$

Changer "l'ordre" des bornes revient à multiplier par -1 donc on change le sens de l'inégalité $\rightarrow \Leftrightarrow \int_{1}^{\frac{1}{2}} \ln x\,dx > 0$

e) $\forall x \in [-\frac{\pi}{2};0] \quad \sin x \leqslant 0$ (d'après le cercle trigo)

$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \int_{0}^{-\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \geqslant 0$

f) $\forall x \in [0;\pi]$

$0 \leqslant \sin x \leqslant 1$

$\Leftrightarrow -1 \leqslant -1+\sin x \leqslant 0$

$\Rightarrow \int_{0}^{\pi} (-1+\sin x)\,dx \leqslant 0$

Ceci n'est pas utile pour répondre à la question.