IV Intégrales et primitives - Calcul d'intégrale

Prop : si f est une fonction continue sur un intervalle I
si $a \in I$
Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$
est une primitive de f sur I.

Dem : ROC

principe : On montre que F est dérivable pour tout réel $x_0 \in I$
et que $F'(x_0) = f(x_0)$

Soit $x_0 \in I$ cas où f est croissante

taux de variation de F entre x et x_0 $= \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$

$$= \frac{1}{x - x_0}\left(F(x) - F(x_0)\right)$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right).$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\left(\int_{x_0}^{a} f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \text{d'après CHASLES.}$$

On supposera $x > x_0 \Rightarrow$ on est dans $[x_0, x]$

$t \in [x_0, x] \Leftrightarrow x_0 \leq t \leq x$

$\Rightarrow f(x_0) \leq f(t) \leq f(x)$ car f est $\nearrow$ sur $[x_0, x]$

$\Leftrightarrow \int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt \leq \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \leq \int_{x_0}^{x} f(x)\,dt$

$\Leftrightarrow f(x_0)(x - x_0) \leq \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \leq f(x)(x - x_0).$

$\Leftrightarrow f(x_0) \leq$ Taux de variat° $\leq f(x)$

Or f est continue donc $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Cl : $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(x_0)$ d'après le th des gendarmes

F est donc dérivable en x_0 et on a $F'(x_0) = f(x_0)$

Conséquence : Toute fonction continue sur I possède des primitives sur I

Prop : si f est continue sur I et $a \in I$

Alors les primitives de f sur I sont de la forme.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + k \quad k \in \mathbb{R}$$

Dem ROC

on sait que $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f

Soit F une autre primitive de f sur I.

Considérons h définie sur I par $h(x) = F(x) - G(x)$

h est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables

$$\forall x \in I \quad h'(x) = F'(x) - G'(x)$$
$$= f(x) - f(x) = 0$$

donc h est constante $\Leftrightarrow \forall x \in I \quad h(x) = k \quad k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow F(x) - G(x) = k \quad k \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow F(x) = G(x) + k \quad k \in \mathbb{R}$$

propriété : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule pour $x = a$

Dem : (ROC) $\bullet$ $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$

Supposons que $G(x)$ soit une autre primitive de f tq $G(a) = 0$

on a alors $G(x) = \int_a^x f(t)dt + k$

$$= F(x) + k$$

de plus $G(a) = 0$

$$\Leftrightarrow F(a) + k = 0$$
$$\Leftrightarrow 0 + k = 0$$
$$\Leftrightarrow k = 0$$

donc $G(x) = F(x)$

Théorème : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$

Soit F une primitive de f sur $[a,b]$.

Alors on a $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Dem (ROC)

il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = \int_a^x f(t)dt + k$.

donc $F(a) = \int_a^a f(t)dt + k$

$\Leftrightarrow F(a) = k$

donc $F(b) = \int_a^b f(t)dt + k$

$\Leftrightarrow F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a)$

$\Leftrightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.