Ex 46 p. 252 : Exercice type (difficile)

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

$f(x) = \frac{1}{x}$

Exple de calcul $\quad U_1 = \frac{1}{1} = 1 \qquad U_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

1°) Pour étudier les variations de (U_n) on étudie le signe de

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$= \left(\cancel{1} + \cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{\tfrac{1}{3}} + \cancel{\dots} + \cancel{\tfrac{1}{n}} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(\cancel{1} + \cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{\tfrac{1}{3}} + \cancel{\dots} + \cancel{\tfrac{1}{n}}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad U_{n+1} - U_n > 0 \Leftrightarrow U_{n+1} > U_n$

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

2°) a) $x \in [k, k+1] \Leftrightarrow k \leq x \leq k+1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k+1}$ car la fct inverse est stt ↘ sur $[k, k+1]$

$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{k}$

b) $\frac{1}{k+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$$

intégrat° de fcts constantes

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1}(k+1-k) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \frac{1}{k}(k+1-k)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \frac{1}{k}$$

c) L'aire sous la courbe entre k et $k+1$ est comprise entre $\frac{1}{k+1}$ UA et $\frac{1}{k}$ UA.

3°) D'après 2°) b)

$k=1$ $\quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1+1} \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq \frac{1}{1} \quad 1$

$k=2$ $\quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2+1} \leq \int_2^3 f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$k=n$. $\quad \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \frac{1}{n}$

Addition membre à membre

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$$

$$u_{n+1}-1 \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq u_n$$

4°) $\int_1^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_1^{n+1} = \ln(n+1) - \ln 1$

$= \ln(n+1)$

on a donc $u_{n+1} - 1 \leq \boxed{\ln(n+1) \leq u_n}$ (1)

$\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$

$\lim\limits_{N\to+\infty} \ln N = +\infty$

par composition $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$

D'après (1) et par comparaison des limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.