46 La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est définie par $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et la fonction f est définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Justifier que pour tout x de $[k\,;k+1]$, $k\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k+1}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{k}$.

b. En déduire que $\frac{1}{k+1}\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\,dx\leqslant\frac{1}{k}$.

c. Interpréter graphiquement cet encadrement.

3. En utilisant la relation de Chasles sur les intégrales, en déduire que pour tout $n\geqslant 1$, $u_{n+1}-1\leqslant\int_1^{n+1}f(x)\,dx\leqslant u_n$.

4. Calculer $\int_1^{n+1}f(x)\,dx$. En déduire la limite de la suite (u_n).

92 **D'après BAC**

Le but de l'exercice est de donner un encadrement du nombre I défini par $\mathrm{I}=\int_0^1\frac{x^2e^x}{1+x}\,dx$.

Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x)=\frac{e^x}{1+x}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0\,;1]$.

2. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{5}\right)$.

a. Justifier que pour tout entier k compris entre 0 et 4,

$$\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right)\leqslant\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}}\frac{e^x}{1+x}\,dx\leqslant\frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right).$$

Interpréter graphiquement à l'aide de rectangles les inégalités précédentes.

b. En déduire que $\frac{1}{5}S_4\leqslant\int_0^1\frac{e^x}{1+x}\,dx\leqslant\frac{1}{5}(S_5-1)$.

c. Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_4 et de S_5 respectivement.

En déduire que $1{,}0917\overset{3}{6}\leqslant\int_0^1\frac{e^x}{1+x}\,dx\leqslant 1{,}1636$.

3. a. Démontrer que pour tout réel x de $[0\,;1]$, on a :

$$\frac{1}{1+x}=1-x+\frac{x^2}{1+x}.$$

b. Justifier l'égalité :

$$\int_0^1\frac{e^x}{1+x}\,dx=\int_0^1(1-x)e^x\,dx+\mathrm{I}.$$

c. Déterminer des réels a et b tels que la fonction $x\mapsto(ax+b)e^x$ soit une primitive de la fonction $x\mapsto(1-x)e^x$ sur $[0\,;1]$.

d. En déduire un encadrement de I d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1}.