DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

SUITES NUMÉRIQUES

Pré requis : • Suites généralités (1ère spé maths)
• suites arithmétiques et géométriques (1ère spé maths)
• Fiche méthode 1 et 2 (Terminale spé maths)

I La démonstration par récurrence

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 3^n + 1$

• Vérifions sur quelques exemples

$n=0$ $u_0 = 2$ et $3^0 + 1 = 1 + 1 = 2$ donc $u_0 = 3^0 + 1$

$n=1$ $u_1 = 3u_0 - 2$ et $3^1 + 1 = 3 + 1$
$= 4$
$= 3 \times 2 - 2 = 4$ donc $u_1 = 3^1 + 1$

$n=2$ $u_2 = 3u_1 - 2$ et $3^2 + 1 = 9 + 1$
$= 3 \times 4 - 2 = 10$ $= 10$
donc $u_2 = 3^2 + 1$

Rq : • Il semble que la propriété soit vraie (conjecture)

• On peut utiliser la représentation pratique suivante

$u_0, u_1, u_2 \ldots \qquad u_{n-1}, u_n, u_{n+1}, \ldots$

Il y a une notion de temporalité ou générationnelle

Principe général de la démonstration par récurrence

→ On vérifie que l'"ancêtre" possède le gène (la propriété est vraie au 1er rang)

→ On montre que la propriété est héréditaire : elle se transmet d'une génération à la suivante (d'un rang au rang suivant)

Solution et rédaction :

Initialisation : au 1er rang   On veut montrer que $u_0 = 3^0 + 1$

$u_0 = 2$ et $3^0 + 1 = 1+1 = 2$

On a bien $u_0 = 3^0 + 1$ la propriété est vraie au 1er rang

Hérédité :

→ Hypothèse de récurrence (HR) : On suppose que la propriété est vraie à un rang n donné :

$$u_n = 3^n + 1$$

→ Au rang suivant :

(On veut montrer que $u_{n+1} = 3^{(n+1)} + 1$)

$$u_{n+1} = 3u_n - 2 \quad \text{d'après la déf de la suite}$$

$$= 3(3^n + 1) - 2 \quad \text{d'après HR}$$

$$= 3 \times 3^n + 3 - 2$$

$$= 3^{n+1} + 1$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3^n + 1$

Rq : • le $\forall n \in \mathbb{N}$ n'apparaît que dans la conclusion.

• On peut envisager une démonstration par récurrence lorsqu'on veut montrer une propriété "pour tout n".