III Suites majorées – minorées – bornées

Définition : Soit (u_n) une suite numérique

Soient $M, m \in \mathbb{R}$

1°) (u_n) est majorée par M (ou M est un majorant de (u_n))

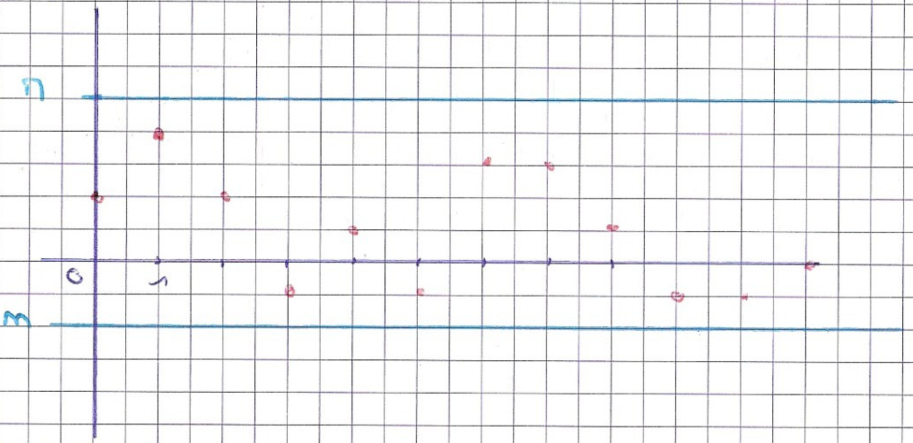
$\boxed{\text{ssi}}$ pour tout n on a $u_n \leq M$

2°) (u_n) est minorée par m (ou m est un minorant de (u_n))

$\boxed{\text{ssi}}$ pour tout entier n on a $u_n \geq m$

3°) (u_n) est bornée $\boxed{\text{ssi}}$ elle est majorée et minorée

Graphiquement pour une suite bornée



Exercice type

Question 2 : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0,1]$

Initialisation : Au 1er rang $n=0$

$u_0 = \frac{1}{8} \Rightarrow u_0 \in [0,1]$ la propriété est vraie.

Hérédité :

→ Hypothèse de récurrence (HR) : on suppose la propriété vraie à un rang n donné : $u_n \in [0,1]$

→ au rang suivant : on veut montrer que $u_{n+1} \in [0,1]$

$u_n \in [0,1]$ d'après HR

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq 1$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{2} u_n \leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

on a $u_{n+1} = f(u_n)$
$= \frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad 0 \leq u_{n+1} \leq 1$

$\Leftrightarrow \quad u_{n+1} \in [0,1]$

la propriété est héréditaire

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \in [0,1]$

Rq : Dans l'étape d'hérédité on peut aussi utiliser le sens de variation de la fonction si on la connaît

on aurait alors $\quad u_n \in [0,1]$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq 1$

$\Leftrightarrow \quad f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$ car f st $\nearrow$ sur $[0,1]$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

$\Rightarrow \quad 0 \leq u_{n+1} \leq 1$

$\Leftrightarrow \quad u_{n+1} \in [0,1]$