III) Sens de variation d'une suite

Def : Soit (u_n) une suite

1°) (u_n) est croissante $\boxed{ssi}$ $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n

2°) (u_n) est décroissante $\boxed{ssi}$ $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n

3°) (u_n) est constante $\boxed{ssi}$ $u_{n+1} = u_n$ pour tout n.

Rq : strictement croissante : $u_{n+1} > u_n$

strictement decroissante : $u_{n+1} < u_n$.

Conséquence : **Méthode de base**

Pour étudier les variations d'une suite (u_n) on compare u_{n+1} et u_n (pour tout entier n) donc on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Propriété (triviale) :

1) Une suite croissante est minorée par son 1er terme

2) Une suite décroissante est majorée par son 1er terme.

Vocabulaire : une suite qui ne change pas de sens de variation est monotone ou strictement monotone

Exercice type.

Question 3 : Etudier les variations de (u_n)

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{8} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Pour étudier les variations de (u_n) on etudie le signe de $u_{n+1} - u_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2}\right) - u_n$

$$= -\frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2}$$

A ce stade il faut penser à utiliser la majoration ou la minoration montrées dans les questions précédentes

On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq 1$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -\frac{1}{2} u_n \geq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2} u_n + \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq u_{n+1} - u_n \geq 0$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \geq u_n$

la suite est donc croissante.

Remarque : On aurait aussi pu envisager une démonstration par récurrence car la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.

Initialisation : au 1er rang

$u_0 = \frac{1}{8}$ et $u_1 = \frac{1}{2} u_0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$

On a bien $u_1 \geq u_0$

Hérédité :

-> HR : On suppose la propriété vraie à un rang donné

$$u_{n+1} \geq u_n$$

-> au rang suivant : on veut montrer que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$

D'après HR $u_{n+1} \geq u_n$.

$\Leftrightarrow f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ car f est croissante sur $[0,1]$

$$\Leftrightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1}$$

La prop est héréditaire

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \geq u_n$ donc (u_n) est croissante