## IV Exemple d'utilisation de la fonction associée

$(U_n)$ est définie pour tout entier $n$ par $U_n = 3e^{-n} + 1$

1°) Soit $f$ la fonction associée à cette suite.

Etudier les variations de $f$ sur $[0, +\infty[$

2°) Montrer que $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) \in [0, 5]$

3°) En déduire les propriétés de la suite $(U_n)$

1°) on a $f(x) = 3e^{-x} + 1$

$f$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) = 3 \times (-e^{-x})$ $\qquad (e^{ax+b})' = a e^{ax+b}$

$= -3e^{-x}$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| variations de $f$ | $4$ | ↘ | |

Pour étudier les variations de $f$ on étudie le signe de $f'(x)$

2°) D'une part $f$ est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

et $f(0) = 4 \implies \forall x \in [0, +\infty[ \quad f(x) \leq 4$ (1)

D'autre part $\forall x \in [0, +\infty[ \quad e^{-x} > 0$ $\qquad$ prop de la fct expo

$\iff 3e^{-x} > 0$

$\iff 3e^{-x} + 1 > 1$ (2)

(1) et (2) $\implies 1 < f(x) \leq 4$

$\implies 0 \leq f(x) \leq 5$

$\iff f(x) \in [0, 5]$.

3°) Les propriétés de la fonction associée se transmettent à la suite $(U_n)$

Conclusion : • $(U_n)$ est strictement décroissante.

• $(U_n)$ est bornée : majorée par 5 et minorée par 0.