V Exemple de suite arithmético-géométrique

exercice type : La suite (u_n) est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1°) Montrer que (v_n) est une suite géométrique

2°) Exprimer u_n en fonction de n

Rq préliminaire : on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 6 \Leftrightarrow v_n + 6 = u_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= \left(\frac{1}{3} u_n + 4\right) - 6 \\ &= \frac{1}{3} u_n - 2 \\ &= \frac{1}{3}(v_n + 6) - 2 \\ &= \frac{1}{3} v_n + 2 - 2 \\ &= \frac{1}{3} v_n \end{aligned}$$

Conclusion : la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$

et de 1er terme $v_0 = u_0 - 6 = 1 - 6 = -5$

Elle a donc pour terme général

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 \times q^n$

$$\Leftrightarrow v_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

2°) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n + 6$ d'après la remarque.

$$\Rightarrow u_n = -5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$$