

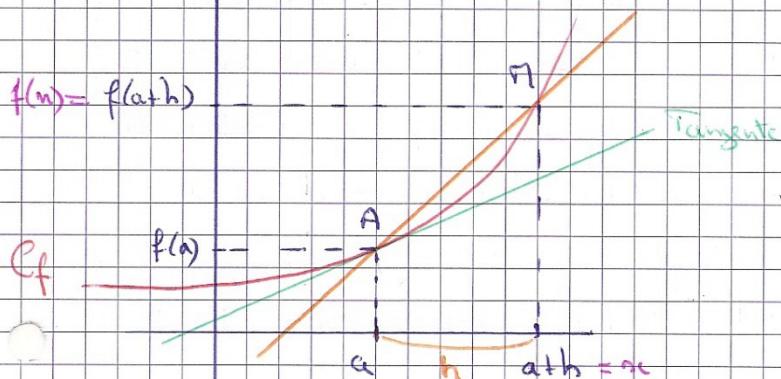
### 3°) Dérivabilité

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

Soit  $C_f$  sa courbe représentative.

Soit  $a \in I$  soit  $A(a, f(a))$

Soit  $h \in \mathbb{R}_+^*$  soit  $\Gamma(a+h, f(a+h))$



On définit le taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $a+h$  par

$$\mathcal{T}(a, a+h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

= coefficient directeur de  $(A\Gamma)$

N.B: en prenant  $m = a+h$  ( $\Rightarrow h = m-a$ ) on obtient

$$\mathcal{T}(a, a+h) = \mathcal{T}(a, m) = \frac{f(m) - f(a)}{m - a}$$

lorsque  $h \rightarrow 0$  ( $\Leftrightarrow m \rightarrow a$ ) alors  $\Gamma$  se rapproche de  $A$ .

et  $(A\Gamma)$  vient progressivement se confondre avec la tangente

à  $C_f$  au point  $A$  d'abscisse  $a$ . On a alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \text{coefficent directeur de la tangente} \\ (\text{si elle n'est pas verticale}) \\ = L \in \mathbb{R}$$

$L$  est alors appelé le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  et on dit que  $f$  est dérivable en  $a$ .

$$\text{Rq: } \lim_{m \rightarrow a} \frac{f(m) - f(a)}{m - a} = L$$

Définition:  $f$  est définie sur un intervalle  $I$ .

soit  $a \in I$ .

$f$  est dérivable en  $a$  (ssi) il y a des 2 propriétés suivantes et vérifiées.

1)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L \in \mathbb{R}$

ou  $\lim_{n \rightarrow a} \frac{f(n) - f(a)}{n - a} = L$  en prenant  $n = a + h$

2)  $f(a+h) = f(a) + hL + h\varepsilon(h)$  avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

ou  $f(n) = f(a) + (n-a)L + (n-a)\varepsilon(n-a)$

en prenant  $n = a + h$ .

Le réel  $L$  est alors appelé le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  et est noté  $f'(a)$ .

Propriétés:

1) si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f'(a)$  est le coefficient directeur de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $a$ .

2) si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \pm \infty$  alors  $f$  n'est pas

dérivable en  $a$  et  $C_f$  admet une tangente verticale au point d'abscisse  $a$ .

Rq: la proposition 2 de la définition est appelée le développement limité à l'ordre 1 de la fonction  $f$  au voisinage de  $a$ .

$$f(n) = f(a) + (n-a)L + (n-a)\varepsilon(n-a)$$

$$f(n) = f(a) + (n-a)f'(a) + (n-a)\varepsilon(n-a)$$

En posant  $y = f(n)$  on obtient

$$\underline{y = f(a) + (n-a)f'(a) + (n-a)\varepsilon(n-a)}$$

Équation de la tangente.

Prop: si  $f$  est dérivable en  $a$  alors sa courbe représentative ne présente aucun angle au point A d'abscisse  $a$ .

Prop:  $f$  est dérivable sur  $I$  s'il  $f$  est dérivable en tout réel  $a \in I$ .

(admis) Prop: la somme, le produit, la différence et le quotient (à dénominateur non nul) de 2 fonctions dérivables sur  $I$  est dérivable sur  $I$ .

Prop: si  $f$  est dérivable en  $a$  alors elle est continue en  $a$ .

Attention le réciproque est fausse.

Démonstration:

$f$  dérivable en  $a$

$$\Leftrightarrow f(m) = f(a) + (m-a)L + (m-a)\epsilon(m-a)$$

avec  $\lim_{m \rightarrow a} \epsilon(m-a) = 0$

On veut calculer la limite de  $f(m)$  quand  $m \rightarrow a$   
quand  $m \rightarrow a$  alors  $(m-a) \rightarrow 0$

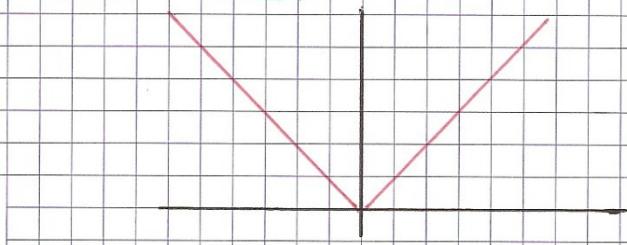
$$\epsilon(m-a) \rightarrow 0$$

$$(m-a)L \rightarrow 0$$

donc  $\lim_{m \rightarrow a} f(m) = f(a)$ .

$\Leftrightarrow f$  est continue en  $a$ .

Contre-exemple: la fonction valeur absolue



Cette fonction n'est pas dérivable en 0

car  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0^+ \\ h > 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1$

et  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0^- \\ h < 0}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1$