

III Fonctions composées - Complément de dérivation

Def: Soit v une fonction définie sur un intervalle I
soit u une fonction définie sur un intervalle J
contenant $v(I)$

On définit sur I la fonction $w \circ v$, composée de v
suivie de w par :

$$\forall n \in I \quad w \circ v(n) = w(v(n))$$

ex: $v(n) = n^2 + 3$

$$w(n) = 2n - 5$$

$$\begin{aligned} \text{et } w \circ v(n) &= w(v(n)) \\ &= w(n^2 + 3) \\ &= 2(n^2 + 3) - 5 \\ &= 2n^2 + 6 - 5 = 2n^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } v \circ w(n) &= v(w(n)) \\ &= v(2n - 5) \\ &= (2n - 5)^2 + 3 \\ &= 4n^2 - 20n + 25 + 3 \\ &= 4n^2 - 20n + 28 \end{aligned}$$

ATTENTION : sauf si $v \circ w$ et $w \circ v$ pas de commutativité

Propriété: [si] v est dérivable sur I

et w dérivable sur J contenant $v(I)$

[Alors], $w \circ v$ est dérivable sur I et on a

$$(w \circ v)' = w' \times v'$$

Démonstration:

Soit $a \in I$

v est dérivable en a .

$$\Leftrightarrow v(ath) = v(a) + h v'(a) + h \varepsilon_1(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$$

$$\Leftrightarrow |v(ath) - v(a)| = h v'(a) + h \varepsilon_1(h) \quad (1)$$

$v(a) \in J$ donc v est dérivable en $v(a)$

$$\Leftrightarrow v(v(a)+k) = v(v(a)) + k v'(v(a)) + k \varepsilon_2(k) \text{ avec}$$

en prenant $k = v(ath) - v(a)$ $\lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon_2(k) = 0$

$$\Leftrightarrow v(ath) = v(a) + k \text{ on obtient}$$

$$v(v(ath)) = v(v(a)) \\ + [h v'(a) + h \varepsilon_1(h)] v'(v(a)) \\ + [h v'(a) + h \varepsilon_1(h)] \varepsilon_2(h v'(a) + h \varepsilon_1(h))$$

$$= v(v(a)) + h v'(a) v'(v(a)) \\ + h \varepsilon_1(h) v'(v(a)) + [h v'(a) + h \varepsilon_1(h)] \varepsilon_2(h v'(a) + h \varepsilon_1(h))$$

$$= v(v(a)) + h v'(a) v'(v(a)) \\ + h [\varepsilon_1(h) v'(v(a)) + [v'(a) + \varepsilon_1(h)] \varepsilon_2(h v'(a) + h \varepsilon_1(h))] \\ \xrightarrow{0 \text{ quand } h \rightarrow 0}$$

on le note $\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

$$= v(v(a)) + h v'(a) v'(v(a)) + h \varepsilon(h)$$

Conclusion $v \circ v$ est dérivable en a et on a

$$(v \circ v)'(a) = v'(a) v'(v(a))$$

Application: on obtient de nouvelles formules de dérivation

$$\cdot (e^v)' = v e^v \text{ en prenant } v(t) = e^t \text{ et } v'(t) = e^t$$

$$\cdot (\sqrt{v})' = \frac{v'}{2\sqrt{v}} \text{ en prenant } v(n) = \sqrt{n} \text{ et } v'(n) = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$