<u>Exercice type</u> Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

<u>1°)</u> Si la suite (u_n) converge, quelles sont les valeurs possibles de sa limite ℓ

<u>2°)</u> Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq 3$

<u>3°)</u> Etudier les variations de (u_n)

<u>4°)</u> Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite

1°) Supposons que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$

on fait un "passage à la limite"

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n)$$

$$\Leftrightarrow \ell = f(\ell) \quad \text{car } f \text{ est continue.}$$

$$\Leftrightarrow \ell = \frac{1}{4}\ell^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{4}\ell^2 - \ell$$

$$\Leftrightarrow 0 = \ell\left(\frac{1}{4}\ell - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4}\ell - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = 4$$

<u>Conclusion</u>: Si (u_n) est convergente alors elle a pour limite 0 ou 4

2°) Initialisation : au 1er rang $n = 0$

$u_0 = 3$ on a bien $0 \leq u_0 \leq 3$

La propriété est vraie au 1er rang

Hérédité : → HR : On suppose la propriété vraie à un rang n donné $0 \leq u_n \leq 3$

→ au rang suivant : on veut montrer que $0 \leq u_{n+1} \leq 3$

D'après HR : $0 \leq u_n \leq 3$

$\Leftrightarrow 0 \leq u_n^2 \leq 9$ car la fonct° carrée est

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{4} u_n^2 \leq \frac{9}{4}$ stt ↗ sur $[0, 3]$

$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 3$

La propriété est héréditaire.

Cl : $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq 3$

3°) Pour étudier les variations de (u_n) on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4} u_n^2 - u_n$

$= u_n \left(\frac{1}{4} u_n - 1\right)$

or d'après 2°) on a

$u_n \geq 0$ | et $0 \leq u_n \leq 3$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{4} u_n \leq \frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{4} u_n - 1 \leq -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} u_n - 1 \leq 0$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n \leq 0$ comme produit d'un nbre positif par 1 nbre négatif.

(u_n) est donc décroissante.

4°) (U_n) est décroissante minorée par 0

donc elle est convergente vers une limite ℓ.

De + $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad 0 \leq U_n \leq 3$

donc $\quad 0 \leq \ell \leq 3$

D'après la question 1 on a $\quad \ell = 0$ ou $\ell = 4$

<u>Conclusion</u>: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$