II Les objets de l'espace et leurs positions relatives

Les objets fondamentaux de l'espace sont les points, les droites et les plans

- Pour définir une droite de l'espace, il faut :
  - 2 points distincts A et B => droite (AB)

  ou - 1 point (l'origine de la droite) souvent noté O et un vecteur directeur $\vec{u}$, non nul.

  La droite est alors notée $(O, \vec{u})$

  Rq: Le couple $(O, \vec{u})$ est aussi un repère de la droite

- Pour définir un plan de l'espace, il faut :
  - 3 points A, B et C non alignés => plan (ABC)

  ou - 1 point O (origine) et 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires

  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan.

  $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de vecteurs du plan.

  ou - 2 droites sécantes

  ou - 1 droite + 1 point extérieur à la droite (plus marginal)

Définition. Etudier la position relative de 2 (ou plusieurs) objets de l'espace (droites et plan), c'est déterminer si les objets sont parallèles, sécants, coplanaires, orthogonaux ...

1°) Visualition des positions relatives dans le cube et propriétés fondamentales

Conseil : Télécharger le fichier vierge, l'imprimer et illustrer les propriétés pour bien visualiser.

↳ refaire cela jusqu'à ce que la visualisation devienne triviale (évidente)

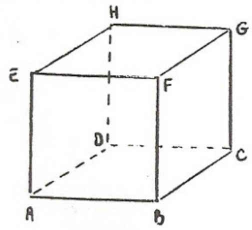
Géométrie dans l'espace

Télécharger et imprimer la version vierge sur programmaths.fr afin de la faire en autonomie

I. Perspective cavalière

Règles

En perspective cavalière:
- Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.
- Les longueurs et les angles ne sont représentés en vraie grandeur que dans les plans «de face».
- Les proportions sur un segment sont respectées.
- Les parties cachées sont représentées en pointillés.



II. Détermination d'un plan

Propriétés

Un plan peut être déterminé par:
- trois points non alignés.
- une droite et un point extérieur à cette droite.
- deux droites sécantes.
- un point et deux vecteurs non colinéaires

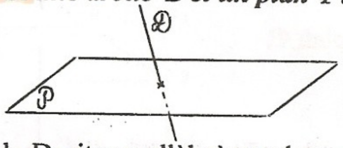
III. Positions relatives

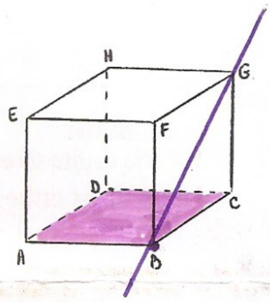
1. Positions relatives d'une droite et d'un plan

a. Droite et plan sécants

Propriété

Si ***une droite* $\mathcal{D}$ *et un plan* $\mathcal{P}$** sont ***sécants***, alors leur intersection est un point M.

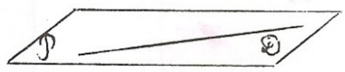


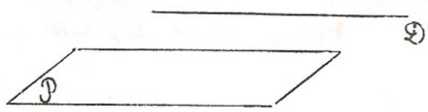


b. Droite parallèle à un plan

Définition

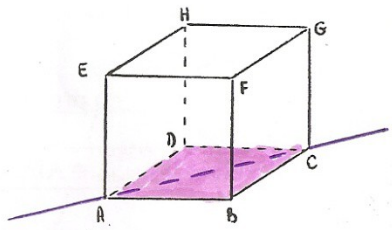
Une droite $\mathcal{D}$ est ***parallèle à un plan*** $\mathcal{P}$ si $\mathcal{D}$ est contenue dans $\mathcal{P}$ ou si $\mathcal{D}$ n'a aucun point commun avec $\mathcal{P}$.





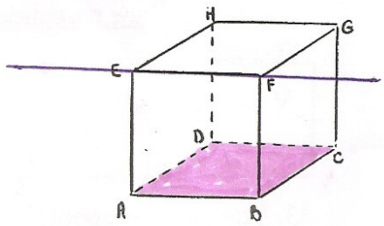
1er cas:

La droite $\mathcal{D}$ est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.



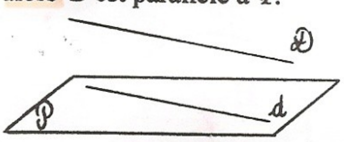
2e cas:

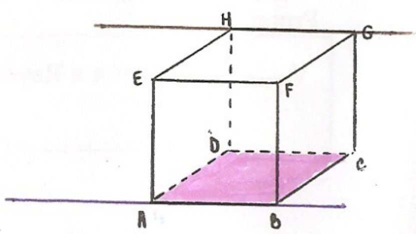
La droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.



Propriété

Si une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à une droite d incluse dans un plan $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$.



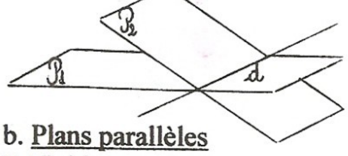


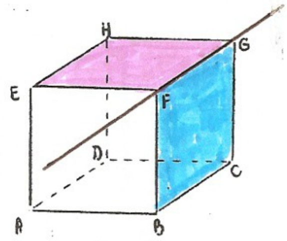
2. Positions relatives de deux plans

a. Plans sécants

Propriété

Si ***deux plans*** $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont ***sécants***, alors leur intersection est une droite d.

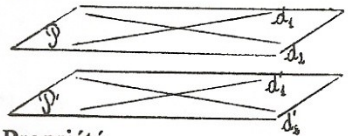


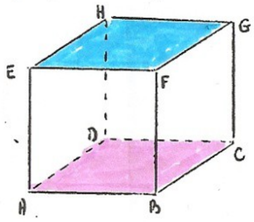


b. Plans parallèles

Définition

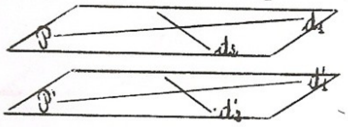
Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont ***parallèles*** si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus ou si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ n'ont aucun point commun.

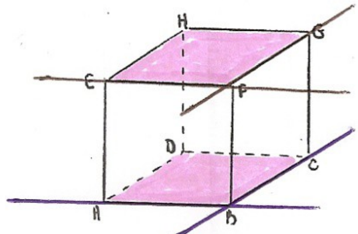




Propriété

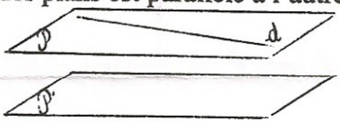
Si deux droites sécantes d_1 et d_2 d'un plan $\mathcal{P}$ sont parallèles à deux droites sécantes d_1' et d_2' d'un plan $\mathcal{P}'$, alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

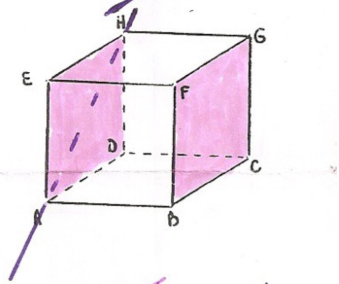




Propriété

Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, alors toute droite d incluse dans un des plans est parallèle à l'autre.

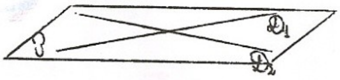


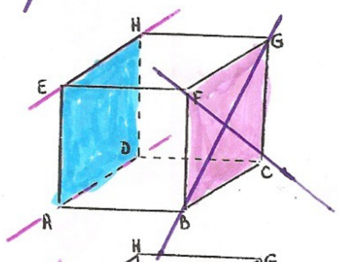


3. Positions relatives de deux droites

a. Droites coplanaires

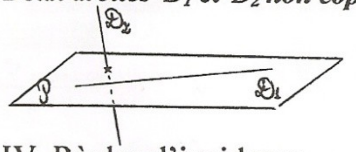
Deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes ou parallèles sont ***coplanaires***.

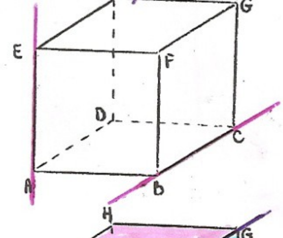




b. Droites non coplanaires

Deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ***non coplanaires*** ne sont ni sécantes, ni parallèles.

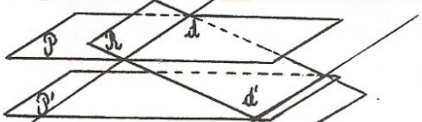


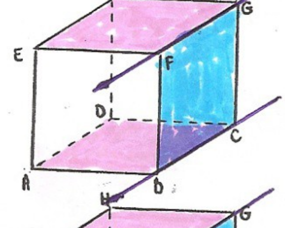


IV. Règles d'incidence

1. Propriété

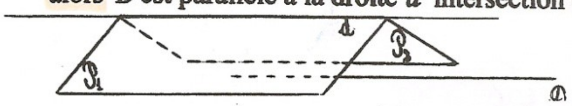
Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, alors tout plan $\mathcal{R}$ qui coupe l'un, coupe l'autre aussi, et les droites d et d' d'intersection sont parallèles.

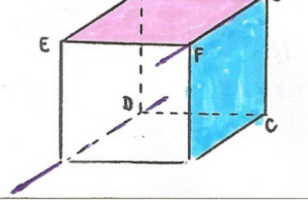




2. Propriété (*Règle «du toit»*)

Si une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants, alors $\mathcal{D}$ est parallèle à la droite d intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

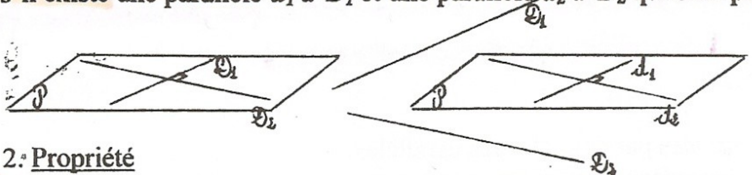


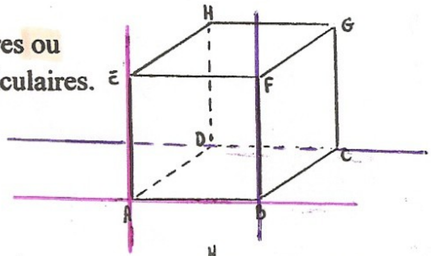


V. Droites orthogonales

1. Propriété

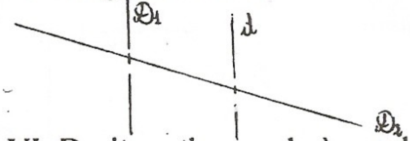
Deux droites $\mathcal{D}_1$ **et** $\mathcal{D}_2$ **sont *orthogonales* si** $\mathcal{D}_1$ **et** $\mathcal{D}_2$ **sont perpendiculaires ou s'il existe une parallèle** d_1 **à** $\mathcal{D}_1$ **et une parallèle** d_2 **à** $\mathcal{D}_2$ **qui sont perpendiculaires.**

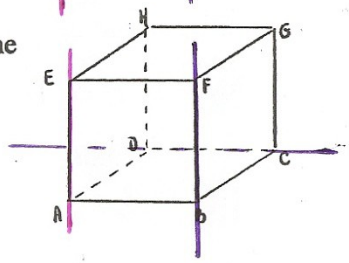




2. Propriété

Si deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonales, alors toute droite d parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

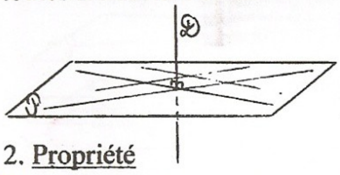


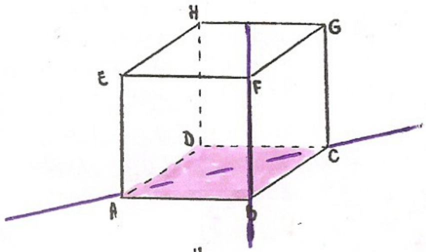


VI. Droite orthogonale à un plan

1. Définition

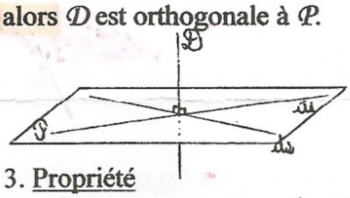
Une droite $\mathcal{D}$ **est *orthogonale à un plan*** $\mathcal{P}$ si $\mathcal{D}$ est orthogonale à toutes les droites de $\mathcal{P}$.

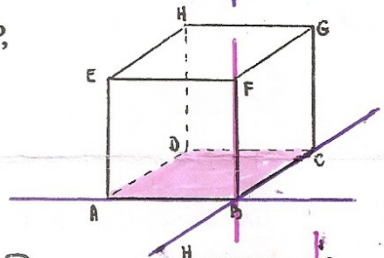




2. Propriété

Si une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à deux droites d_1 et d_2 sécantes d'un plan $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$.

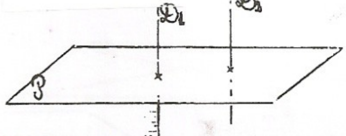


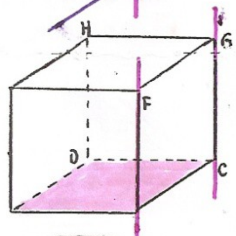


3. Propriété

Si deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonales à un même plan $\mathcal{P}$

Alors $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles



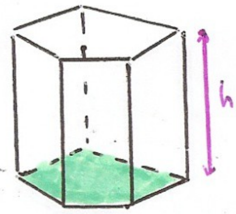


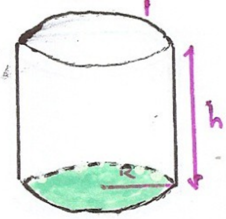
VII. Volumes

1. Volume d'un prisme ou d'un cylindre

Propriété

$$V_{\text{prisme ou cylindre}} = \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$



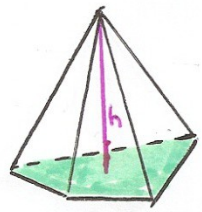


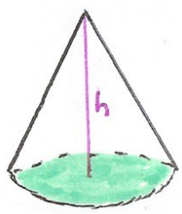
2. Volume d'une pyramide ou d'un cône

Propriété

$$V_{\text{pyramide ou cône}} = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}$$

$$V_{\text{Cône}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$





3. Volume d'une boule

Propriété

$$V_{\text{boule}} = \frac{1}{3} \times 4 \times \pi \times \text{Rayon}^3$$