IV Vecteurs de l'espace

1°) Définitions et propriétés de base

On retrouve avec les vecteurs de l'espace, les même notions qu'avec les vecteurs du plan.

- La définition d'un vecteur avec ses 3 caractéristiques

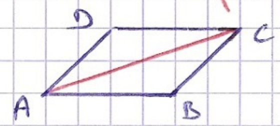
$\overrightarrow{AB}$: | direction (AB)
sens : de A vers B
norme $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

- La définition d'une translation

A' image de A par $t_{\vec{u}} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{u}$

- La caractérisation du parallélogramme

ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$



$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

- La multiplication d'un vecteur par un réel

$k\vec{u}$: | direction : la même que $\vec{u}$
sens : le même que celui de $\vec{u}$ si $k > 0$
le sens opposé à $\vec{u}$ si $k < 0$
norme : $\|k\vec{u}\| = |k| \, \|\vec{u}\|$

- La colinéarité de vecteurs

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow$ ils ont même direction
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

ATTENTION La propriété de colinéarité avec le déterminant n'est pas valable (applicable) dans l'espace

- On retrouve le vecteur nul qui ne possède qu'une seule caractéristique : - sa norme est égale à 0
- Il est colinéaires à tous les autres vecteurs donc il possède toutes les directions
- Il n'a pas de sens

- Les propriétés algébriques
  - $k\vec{u} = \vec{0} \iff k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
  - $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$
  - $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
  - $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

- La caractérisation du milieu d'un segment

I milieu de [AB] $\iff \vec{AI} = \vec{IB}$

$\iff \vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

$\iff \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

- LA RELATION DE CHASLES

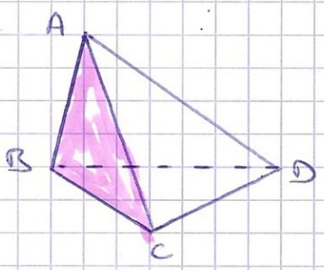
C'est le seul outils dont on dispose pour faire des démonstrations en géométrie pure (sans coordonnées)

Pour tous points M du plan $\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}$

décomposition →

← Réduction

Exemple d'utilisation.



ABCD est un tetraèdre

Soit M le point tel que $\vec{AM} = 3\vec{BM} + \vec{CM}$

Déterminer les réels x et y tels que

$\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$

$\vec{AM} = 3\vec{BM} + \vec{CM}$

$\iff \vec{AM} = 3(\vec{BA} + \vec{AM}) + \vec{CA} + \vec{AM}$

$\iff \vec{AM} = 3\vec{BA} + 3\vec{AM} + \vec{CA} + \vec{AM}$

$\iff \cancel{\vec{AM}} - 3\vec{AM} - \cancel{\vec{AM}} = 3\vec{BA} + \vec{CA}$

$\iff -3\vec{AM} = 3\vec{BA} + \vec{CA}$

$\iff \vec{AM} = \frac{3}{-3}\vec{BA} - \frac{1}{3}\vec{CA}$

$\iff \vec{AM} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

Conclusion : $x = 1$

$y = \frac{1}{3}$

Une propriété propre à l'espace

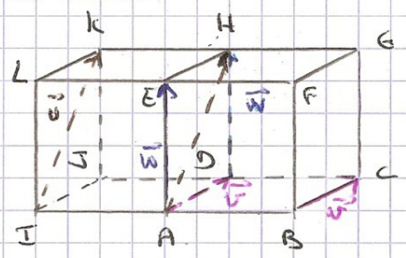
Propriété : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ 3 vecteurs de l'espace

Soient A, B, C et D 4 points de l'espace tels que

$\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$ et $\vec{AD} = \vec{w}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\boxed{\text{ssi}}$ A, B, C et D sont coplanaires

Exemple 1 :

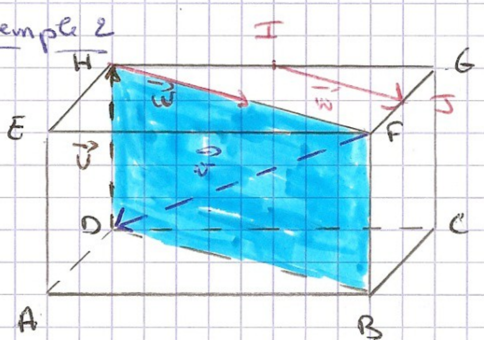


$\vec{u} = \vec{IK} = \vec{AH}$ $\quad$ $\vec{v} = \vec{BC} = \vec{AD}$ $\quad$ $\vec{w} = \vec{DH} = \vec{AE}$

A, H, D et E sont coplanaires

donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ aussi

Exemple 2



I et J sont les milieux de [GH] et de [GF]

$\vec{u} = \vec{DH}$

$\vec{v} = \vec{FD}$

$\vec{w} = \vec{IJ}$

Dans le triangle HGF la droite (IJ) est la droite qui passe par les milieux des côtés. Elle est donc parallèle à (HF). On a de plus $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{HF}$ (théorème de la droite des milieux, cas particulier du th de Thalès)

Les 3 vecteurs $\frac{1}{2}\vec{HF}$, $\vec{FD}$ et $\vec{DH}$ sont coplanaires.

donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ aussi.