I Repères de l'espace

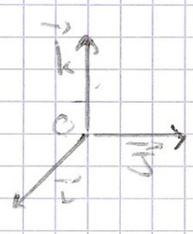
Définition : Un repère de l'espace est constitué
- d'1 point (l'origine) souvent noté O
- de 3 vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ non coplanaires

Il est noté $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé une base de vecteurs de l'espace
- si $\vec{i}$ $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont 2 à 2 orthogonaux alors le repère est orthogonal.
- si de plus $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ Alors le repère est orthonormé (ou orthonormal)
- L'axe $(O, \vec{k})$ est appelé l'axe des cotes.

Remarques

* On représente habituellement le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal de la façon suivante :



* Lorsque vous êtes dans une salle de classe, le repère se situe dans le coin en bas à gauche devant vous. Le tableau est le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$

Définition : Coordonnées d'un point

L'espace est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal.

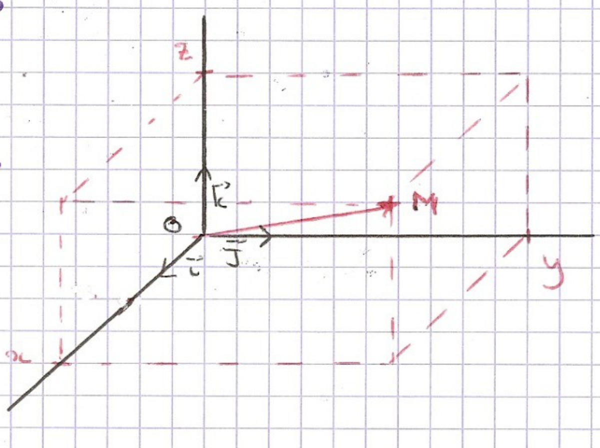
M a pour coordonnées x, y et z dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\boxed{\text{SSI}}$ $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

et on écrit $M(x, y, z)$

Le vecteur $\vec{OM}$ a alors les mêmes coordonnées que M dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

et on écrit $\vec{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$



On retrouve les même propriétés avec les coordonnées que celles vues en seconde dans le plan...

- $k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$
- $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$
- $\vec{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées

  $I\left(\frac{x_A+x_B}{2} ; \frac{y_A+y_B}{2} ; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$ (moyenne des coordonnées)
- $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2 + (y_B-y_A)^2 + (z_B-z_A)^2}$

... et en premier avec le produit scalaire

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Remarque : les coordonnées d'un point s'écrivent en ligne
les coordonnées d'un vecteur s'écrivent en colonne

Exercice type (Produit scalaire)

Soient $A(1;2;3)$, $B(3;-1;7)$ et $C(-1;2;4)$

Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires

$A \in (AB)$ et $A \in (AC)$

$\vec{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times (-2) + (-3) \times 0 + 4 \times 1$
$= -4 + 0 + 4$
$= 0$

Le produit scalaire est nul donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux

Cl : (AB) et (AC) sont perpendiculaires

Propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\boxed{\text{ssi}}$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Exercice type 2 Retour sur la colinéarité

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{3}-\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\sqrt{6}+2\\ 1\\ \sqrt{3}+\sqrt{2}\end{pmatrix}$ 2 vecteurs de l'espace

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

$$\frac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}} = \frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\times\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}\times\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$$\frac{y_{\vec{v}}}{y_{\vec{u}}} = \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$$\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$

Les coordonnées sont proportionnelles donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et on a $\vec{v} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})\vec{u}$

Complément : caractérisation vectorielle des droites et des plans

Def 1 : Soient A et B 2 points distincts de l'espace

La droite (AB) est l'ensemble des point M de l'espace tels que

$\vec{AM} = x\vec{AB}$ où $x \in \mathbb{R}$

$\vec{AB}$ est le vecteur directeur de la droite, $(A, \vec{AB})$ est un repère de la droite et x est l'abscisse de M dans $(A, \vec{AB})$

Def 2 : Soient A, B et C 3 points non alignés de l'espace

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels que

$\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Le couple $(\vec{AB}, \vec{AC})$ est une base de vecteurs du plan (ABC)

$(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ est un repère du plan (ABC)

x et y sont les coordonnées de M dans $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$