CALCUL DE LIMITES (opérations)
Les 4 CAS INDÉTERMINÉS
COMPOSITION ET CROISSANCES COMPARÉES

I Limites et opérations : Le bon sens avant tout

Propriété : Pour effectuer les calculs avec les limites, on fait preuve de bon sens tout en respectant bien les 4 cas indéterminés

- **exemple 1** : $f(x) = x^3 + x^2 + \frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

par somme des limites

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Remarques :

- La notation $\lim\limits_{x \to a}$ est conservée du temps qu'il reste des x dans l'expression dont on calcule la limite.

- On procède exactement de la même façon pour la limite du terme général d'une suite.

On aurait ici $u_n = n^3 + n^2 + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ la suite (u_n) est divergente vers $+\infty$

- <u>exemple 2</u> : $f(x) = \frac{3}{x}$ au voisinage de $+\infty$ et de 0

On remarque que $f(x) = 3 \times \frac{1}{x}$

* <u>Au voisinage de $+\infty$</u>

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$

* <u>au voisinage de 0</u>

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{3}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{3}{x} = -\infty$

- <u>exemple 3</u> : $f(x) = x^3 + 3e^x + 1$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

→ <u>au voisinage de $+\infty$</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 3e^x = +\infty \end{array}\right\}$$ par somme de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

→ <u>au voisinage de $-\infty$</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 3e^x + 1 = 1 \end{array}\right\}$$ par somme des limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

- **exemple 4** $f(x) = (3x^2+7)(-2x^2+8)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

→ au voisinage de $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2+7 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^2+8 = -\infty\end{array}\right\}$$ par produit des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

→ au voisinage de $-\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2+7 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^2+8 = -\infty\end{array}\right\}$$ par produit des limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

- **exemple 5**: $f(x) = \dfrac{3}{x^2+5x+1}$ au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2+5x+1 = +\infty$

par quotient des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

- **exemple 6**: $f(x) = \dfrac{3}{x} - 3(e^x+1) + \sin x$ en 0 et en $+\infty$

→ au voisinage de 0

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0 \\ x < 0}} \dfrac{3}{x} = +\infty \quad -\infty \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0 \\ <}} -3(e^x+1) = -\dfrac{3}{2} \quad -\dfrac{3}{2} \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0 \\ <}} \sin x = \sin 0 = 0 \quad 0\end{array}\right\}$$ par somme des limites $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

De même $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$

→ au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} -3\underbrace{(\overbrace{e^{x}}^{\to +\infty}+1)}_{\to -\infty} = -\infty$$

$\lim_{x \to +\infty} \sin x$ n'existe pas

mais $-1 \leq \sin x \leq 1$

par somme des limites

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Rq: La limite au voisinage de $+\infty$ est celle d'une fonction ou du terme général d'une suite.
Partout ailleurs cela ne concerne que les fonctions.