II Les 4 cas indéterminés

1°) Le cas " l'infini moins l'infini " $(+\infty) - (+\infty)$

exemple : Calculer la limite de $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$ au voisinage de $+\infty$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} 4x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -5x + 3 = -\infty$

$\Big\}$ forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$

↳ Il faut disposer d'une méthode pour lever l'indétermination

Méthode provisoire : on met en facteur la plus grande puissance de x

Remarque sur la factorisation

si on factorise $4x - 12 = 4(x - 3)$

$$= 4\left(\frac{4x}{4} - \frac{12}{4}\right)$$

Une factorisation correspond à une certaine forme de division.

↳ on peut alors factoriser sans facteur commun.

$$4x - 12 = 5\left(\frac{4x}{5} - \frac{12}{5}\right)$$

↳ application à notre calcul de limite

→ Au voisinage de $+\infty$ ⇒ donc $x^2 \neq 0$

$$f(x) = 4x^2 - 5x + 3 = x^2\left(\frac{4x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{3}{x^2}\right)$$

$$= x^2\left(4 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(4 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 4$

$\Big\}$ par produit des limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On remarque que les termes $-\frac{5}{x}$ et $\frac{3}{x^2}$ deviennent négligeables au voisinage de $+\infty$ on

On peut dire alors que $f(x)$ se comporte comme $4x^2$ c'est à dire son terme / monôme de + haut degré

Cas général pour un polynôme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

$$= x^n \left(a_n \frac{x^n}{x^n} + a_{n-1} \frac{x^{n-1}}{x^n} + \dots + a_1 \frac{x}{x^n} + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

$$= x^n \left(a_n + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}_{} \right)$$

$\to 0$ qd $x \to +\infty$
donc négligeable

Donc au voisinage de $\pm\infty$

$$f(x) \simeq a_n x^n .$$

Propriété : Au voisinage de l'infini, une fonction polynôme se comporte comme son monôme de plus haut degré.

exple : $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^3 = +\infty$

Attention cette propriété n'est valable que pour les polynômes
↳ limitation de la méthode

$$f(x) = e^x - x$$

on a $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty \end{array}\right\}$ forme indéterminée

Comme f n'est pas un polynôme on ne peut pas appliquer la propriété $\Rightarrow$ Il faudra perfectionner la méthode.