4°) Le cas "zéro sur zéro" ("$\frac{0}{0}$") Traitement par factorisation

Exemple : Calculer la limite de $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2-5x+1}{x^2-7x+6}$

au voisinage de 1

On a $\lim\limits_{x \to 1} x^3+3x^2-5x+1 = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} x^2-7x+6 = 0$

} cas indéterminé "$\frac{0}{0}$"

Remarques :

- 1 est une valeur interdite.
- En remplaçant x par 1 au numérateur et au dénominateur on obtient 0.

$\Rightarrow$ 1 est donc une racine du numérateur et du dénominateur.

$\Rightarrow$ On peut donc les factoriser par $(x-1)$

Rappel : Si a est une racine d'une fonction polynôme, Alors on peut la factoriser par $(x-a)$

Pour le dénominateur x^2-7x+6.

$\Delta = b^2-4ac = 49-24 = 25$

Il y a 2 racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 6$

donc $x^2-7x+6 = (x-1)(x-6)$

Pour le numérateur x^3+3x^2-5x+1

Il est factorisable par $(x-1)$ donc on peut écrire

$x^3+3x^2-5x+1 = (x-1)(ax^2+bx+c)$

Il reste à déterminer les réels a, b et c

↳ méthode de base : méthode d'identification des coefficient.

$$x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$$
$$= ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$$
$$= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$$

Propriété Déf : 2 polynomes sont égaux
ssi ils ont même degré et même coefficients

Par identification des coefficients

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 3 \\ c - b = -5 \\ -c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 + a = 3 + 1 = 4 \\ c = b - 5 = 4 - 5 = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

Donc $x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = (x-1)(x^2 + 4x - 1)$

On a alors $f(x) = \dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+4x-1)}{\cancel{(x-1)}(x-6)}$

$$= \frac{x^2+4x-1}{x-6} \quad \text{pour tout } x \neq 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+4x-1}{x-6} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}$$

Remarque :

- le cas "$\frac{0}{0}$" se rencontre quand on calcule la limite en un réel a.
- la méthode de factorisation sera applicable uniquement avec des fonctions polynomes

exple : $f(x) = \dfrac{e^{3x-5} - 1}{x - \frac{5}{3}}$

Quand $x \to \frac{5}{3}$ Alors $x - \frac{5}{3} \to 0$

et $e^{3x-5} - 1 \to e^{3 \times \frac{5}{3} - 5} - 1$

mais on n'a pas de fonction polynome. $\to e^0 - 1 \to 0$