

4 bis le cas "zéro sur zéro" Traitement avec le nombre dérivé

exemple: Calculer la limite de $f(x) = \frac{e^{3x-5} - 1}{x - \frac{5}{3}}$
au voisinage de $\frac{5}{3}$

On a vu précédemment q-

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} e^{3x-5} - 1 = e^{3 \times \frac{5}{3} - 5} - 1 = e^0 - 1 = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} x - \frac{5}{3} = 0$$

} forme indéterminée " $\frac{0}{0}$ "

Remarque: on est toujours dans un calcul de limite
au voisinage d'une valeur interdite.

- Ici pas de factorisation possible car on n'a pas une fonction polynôme au numérateur.

Rappel: Nombre Dérivé

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I

Soit $a \in I$

[SI] $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L \in \mathbb{R}$

[Alors] f est dérivable en a

L est alors appelé le nombre dérivé de f en a
et est noté $f'(a)$

- Vocabulaire: $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est le taux de

variation de la fonction f entre a et x

- le calcul d'un nombre dérivé se fait
avec la fonction dérivée si on en dispose.

Méthode: Il faut donc écrire la fonction f sous la

forme du taux de variation d'une fonction g , définie et dérivable en $\frac{5}{3}$

Question: Comment choisir la fonction g

Réponse: On prend tout ce qui contient des n au numérateur

Dans le cas présent.

Soit g la fonction définie par $g(n) = e^{3n-5}$

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall n \in \mathbb{R} \quad g'(n) = 3e^{3n-5} \quad (e^u)' = u' e^u$$

$$\text{On a alors } g\left(\frac{5}{3}\right) = e^{3 \times \frac{5}{3} - 5} = e^{5-5} = e^0 = 1$$

On peut donc écrire

$$f(n) = \frac{e^{3n-5} - 1}{n - \frac{5}{3}} = \frac{g(n) - g\left(\frac{5}{3}\right)}{n - \frac{5}{3}}$$

On reconnaît le taux de variation de g entre $\frac{5}{3}$ et n

$$\begin{aligned} \text{donc } \lim_{n \rightarrow \frac{5}{3}} f(n) &= \lim_{n \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{g(n) - g\left(\frac{5}{3}\right)}{n - \frac{5}{3}} = g'\left(\frac{5}{3}\right) \\ &= 3e^{3 \times \frac{5}{3} - 5} \\ &= 3e^0 = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion: } \lim_{n \rightarrow \frac{5}{3}} f(n) = 3$$