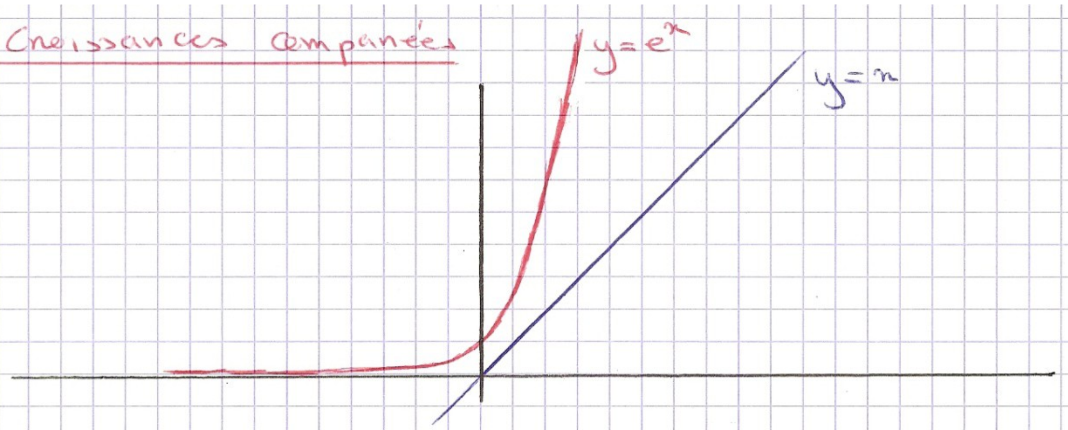
V Croissances comparées



Conjecture : Au voisinage de $+\infty$ il semble que la fonction $f(x)=x$ soit négligeable par rapport à la fonction exponentielle.

Il semble que la propriété suivante soit vraie :

Propriété : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Demonstration :

Soit h définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = e^x - x^2$

h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad h'(x) = e^x - 2x$

h' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables

$\forall x \in \mathbb{R} \quad h''(x) = e^x - 2$

On résout $e^x - 2 > 0$

$\iff e^x > 2$

$\iff x > \ln 2$

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$h''(x)$		$-$	0	$+$	
variation de h'	$\searrow$		$2-2\ln 2$	$\nearrow$	
$h'(x)$			$+$		
variation de h	1		$\nearrow$		
$h(x)$			$+$		

$h'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2$

$= 2 - 2\ln 2 \simeq 0{,}61$

$h(0) = e^0 - 0^2 = 1$

D'après le tableau on a

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad h(x) > 0$

$$\Leftrightarrow e^x - x^2 > 0$$
$$\Leftrightarrow e^x > x^2$$
$$\Rightarrow \frac{e^x}{x} > \frac{x^2}{x} \qquad \text{pour } x \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{e^x}{x} > x$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

<u>Conséquence</u>: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

<u>Demonstration</u>:

Au voisinage de $+\infty$

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^{\frac{nx}{n}}}{x^n} = \frac{e^{\frac{x}{n} \times n}}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} \qquad e^{ab} = (e^a)^b$$

$$= \left[\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right]^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$= \left[\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{nx}{n}}\right]^n = \left[\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right]^n$$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{n} = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \text{ (par croissances comparées)} \end{array}\right\}$ par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$

par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{n} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right]^n = +\infty$

<u>Remarque</u>: Au voisinage de $+\infty$ la fonction exponentielle est plus forte que n'importe quelle puissance de x.

Remarque : (propriété)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Démonstration : $\frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$ (on utilise le quotient des limites)

Rq : on peut parler de croissance comparée lorsque :

- on est au voisinage de l'infini
- on a une écriture sous forme de fraction
- on est dans le cas indéterminé $\frac{\infty}{\infty}$

propriété : $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Dem : on est dans le cas indéterminé "$0 \times \infty$"

Au voisinage de $-\infty$

$$x e^x = -(-x)\, e^{-(-x)} = -\left(\frac{-x}{e^{-x}}\right)$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$

par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-x}{e^{-x}} = 0$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$