VI 3 exemples - une limite remarquable - méthode finale

Exemple 1 : Etudier la limite de $f(x) = e^x - x$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

→ au voisinage de $+\infty$

On est dans le cas indéterminé "$\infty - \infty$"

Méthode définitive : On met en facteur la fonction la plus forte

Ici on a $f(x) = e^x\left(\dfrac{e^x}{e^x} - \dfrac{x}{e^x}\right)$

$$= e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{x}{e^x} = 1$

par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

→ au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc par somme des limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Exemple 2 : Etudier la limite de $f(x) = (3x^2 - 1)e^x$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

→ au voisinage de $-\infty$

On est dans un cas indéterminé "$0 \times \infty$"

$f(x) = 3x^2e^x - e^x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2e^x = 0$ par croissances comparées

$\lim\limits_{x \to -\infty} -e^x = 0$

par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Copyright : ©Programmaths 2020

→ au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 - 1 = +\infty$ | par produit des limites

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Exemple 3 : Etudier la limite de $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ au voisinage de 0

au voisinage de 0

$\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ donc on est dans le cas "$\frac{0}{0}$"

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin x$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = \cos x$

De plus $g(0) = \sin 0 = 0$

On peut écrire $f(x)$ sous forme d'un taux de variation

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - 0}{x - 0} = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0)$

$= \cos 0 = 1$

Limite à retenir $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$