

## II Loi binomiale

### Définition:

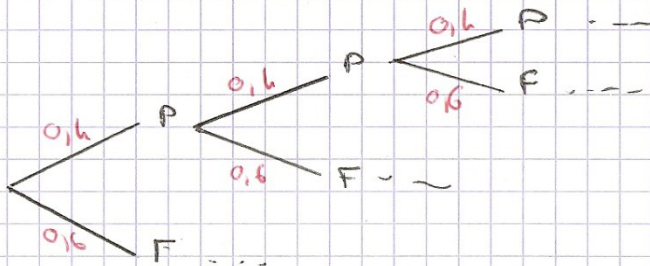
Un **schéma de Bernoulli** de paramètres  $n$  et  $p$  est une expérience aléatoire qui consiste à répéter  $n$  fois de façon indépendante (dans les mêmes conditions) une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ .

Remarque: On est dans le cadre des expériences répétées vu en classe de 1ère

Exemple: On lance 10 fois de suite une pièce de monnaie truquée telle que  $p(\text{Pile}) = 0,4$  et  $p(\text{Face}) = 0,6$   
• On a un schéma de Bernoulli de paramètre 10 et 0,4 en prenant Pile comme succès

Calculons par exemple la probabilité d'obtenir 6 succès (6 fois Pile) et donc 4 échecs.

→ On pourrait construire un arbre pondéré à 10 étages

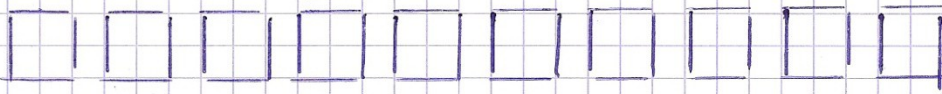


La probabilité d'un chemin est alors égale au produit des probabilités de chacune des branches du chemin.

Un chemin qui comporte 6 succès et 4 échecs aura alors pour probabilité  $0,4^6 \times 0,6^4$

Il reste à savoir combien il y a de chemin avec 6 succès et 4 échecs

Revenons au système d'arbre schématisé (case) adapté aux arbres pondérés



IP fait positionner le succès parmi les 10 cases.

IP fait choisir 6 cases parmi 10

il y a donc  $\binom{10}{6}$  emplacements possibles.

on appelle A l'événement obtenu 6 fois pile

$$\text{on a donc } P(A) = \binom{10}{6} 0,6^6 \times 0,4^4$$

nombre de chemins ayant 6 succès et 4 échecs dans l'arbre pondéré.

Cas général: on répète l'expérience  $n$  fois

le succès a pour probabilité  $p$ .

A: obtenir  $k$  succès ( $k \leq n$ ) (donc  $n-k$  échecs)

$$P(A) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

nombre de chemins.

Propriété - Définition: Dans un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$ .

la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de succès a pour loi de probabilité

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n$$

On dit que cette variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  notée  $\mathcal{B}(n, p)$ .

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1-p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

méthode: Pour justifier qu'on a une loi binomiale,

→ Définir l'épreuve de Bernoulli en donnant le succès et l'échec avec leurs probabilités

→ Indiquer qu'on répète  $n$  fois de façon indépendante l'épreuve de Bernoulli

→ Dire que la variable aléatoire  $X$  est égale au nombre de succès.

Conclusion:  $X$  suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ .

Remarque: On mentionne l'indépendance des différents tirages en disant "on peut assimiler à un tirage successif avec remise"