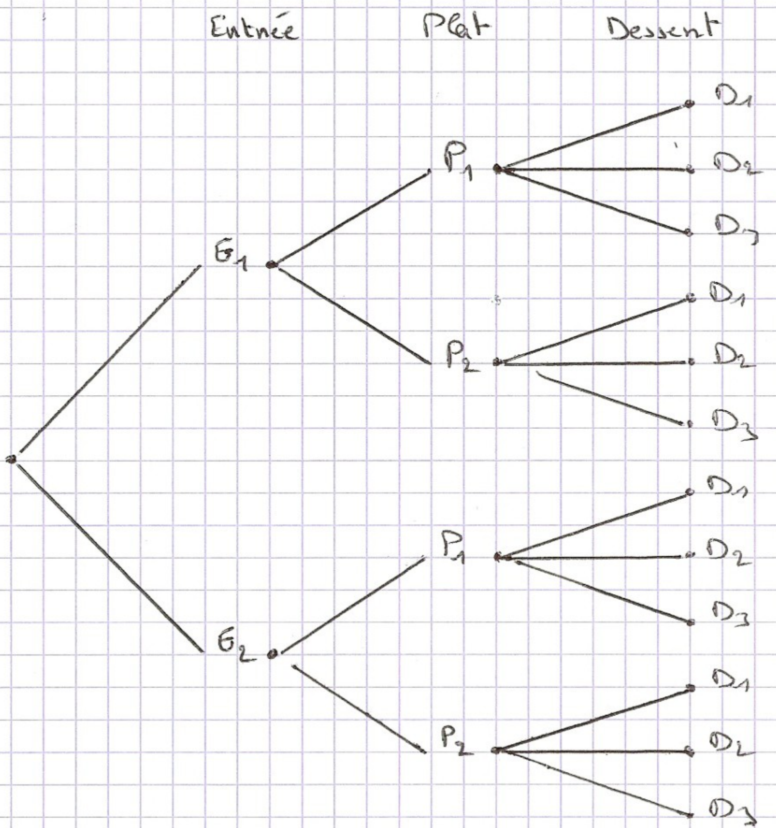
2°) Tirage successif indépendants - Produit cartésien (principe multiplicatif)

Exemple 1 : A la carte d'un restaurant, il y a 2 entrées (E_1, E_2), 2 plats (P_1 et P_2) et 3 desserts (D_1, D_2 et D_3). Combien peut-on constituer de menus.

Pour cette situation, on construit un arbre de comptage.



Menu

(E_1, P_1, D_1)
(E_1, P_1, D_2)
(E_1, P_1, D_3)
(E_1, P_2, D_1)
(E_1, P_2, D_2)
(E_1, P_2, D_3)
(E_2, P_1, D_1)
(E_2, P_1, D_2)
(E_2, P_1, D_3)
(E_2, P_2, D_1)
(E_2, P_2, D_2)
(E_2, P_2, D_3)

2 choix et 2 choix et 3 choix

$2 \times 2 \times 3 = 12$ menus.

Remarque : si on appelle E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts on a

$E = \{E_1, E_2\}$ $\quad P = \{P_1, P_2\}$ et $D = \{D_1, D_2, D_3\}$

$\mathrm{card}(E) = 2$ $\quad \mathrm{card}(P) = 2$ $\quad \mathrm{card}(D) = 3$

On a nombre de menus $= \mathrm{card}(E) \times \mathrm{card}(P) \times \mathrm{card}(D)$

On dit que l'on a fait le produit cartésien de E, P et D que l'on note $E \times P \times D$ " E croix P croix D ". C'est l'ensemble des triplets que l'on a obtenus avec l'arbre.

Exemple 2 : Combien de couples constitués d'1 chiffre et d'une lettre, dans cet ordre, peut on former.

Remarque : Dans la notion de couple, l'ordre est inclus.
en effet les couples $(1;2)$ et $(2;1)$ sont différents et sont représentés par 2 points distincts

Ici la construction de l'arbre n'est pas adaptée car il y aurait trop de branches.
↳ on utilise un système de case qui constitue un arbre schématique de comptage.

1er élément du couple		2ème élément du couple
Chiffre		Lettre
10 choix	et	26 choix
10	×	26

$= 260$ couples

Si on note C et L ces 2 ensembles, on obtient aussi
nombre de couples $= \text{card}(C) \times \text{card}(L)$.

Définition - propriété : Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n ensembles.
le produit cartésien de $E_1, E_2, \dots, E_n$ est noté $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$
qui se lit " E_1 croix E_2 croix ... croix E_n "
Un élément de ce produit cartésien s'appelle un $n$uplet et s'écrit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où $x_i \in E_i$ pour i allant de 1 à n.
De plus, si $E_1, E_2, \dots E_n$ sont des ensembles finis
Alors $\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_n)$
$$= \prod_{i=1}^{n} \text{card}(E_i)$$
C'est le principe multiplicatif.