5°) Tirages simultanés - Combinaisons

Remarque : TIRAGE SIMULTANÉ

$\Leftrightarrow$ NI ORDRE NI RÉPÉTITION

Définition : Lorsqu'on choisit simultanément p éléments d'1 ensemble E qui en contient n, on constitue une partie de E à p éléments qui s'appelle aussi une combinaison de p éléments de E ou encore un sous-ensemble de E à p éléments

exemples :

- Tous les évènements sont des sous-ensemble de Ω
- $\emptyset$ est une partie de E à 0 éléments / combinaison de 0 éléments de E.
- $\{2, 3, 5\}$ est une combinaison de 2 éléments de $\mathbb{N}$ / partie de $\mathbb{N}$ à 2 éléments.

Remarques :

- $\{5 ; 3, 2\} = \{2, 3, 5\}$ car on est dans un tirage simultané $\Rightarrow$ PAS D'ORDRE
- $\{2, 2, 3\}$ n'est pas une combinaison d'éléments de $\mathbb{N}$ car il y a une répétition, ce n'est pas un arrangement car ORDRE ABSENT
- On dit aussi que l'on choisit p éléments parmi n

Définition : • Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté C_n^p $(p \leq n)$

• On utilise aussi une autre notation :

$$C_n^p = \binom{n}{p} \text{ qui se lit "p parmi n"}$$

Vocabulaire : les "p parmi n" s'appellent les nombres binomiaux.

Il reste à déterminer combien il existe de combinaisons de p éléments parmi n.

Pour cela, revenons au comptage du nombre de p-arrangements en adoptant 2 stratégies de comptage équivalentes

1ère stratégie : la méthode directe :

Il y a $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$ p-arrangements

2ème stratégie en 2 temps.

1er temps : on choisit simultanément p éléments parmi n.

→ il y a C_n^p combinaisons possibles

2ème temps

Pour avoir des p-arrangements, il faut prendre chacune des combinaisons obtenues précédemment et les réordonner de toutes les façons possibles.

↳ on effectue donc des permutations sur chaque combinaison

Il y a $A_p^p = p!$ permutation.

nombre obtenu avec la stratégie 2 $= C_n^p \times p!$

Conclusion : les 2 stratégies sont équivalentes

$$A_n^p = C_n^p \times A_p^p$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)\dots(n-p+1) = C_n^p \times p!$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = C_n^p}$$

Remarque : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

donc $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Propriété : le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est

$$\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

exemple : L'ancien tirage du LOTO. On tire 6 boules parmi 49.

Le nombre de grilles que l'on peut jouer est

$$C_{49}^6 = \frac{49\times 48\times 47\times 46\times 45\times 44}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1} = 13\,983\,816$$