II Propriétés de $\binom{n}{p}$ - Triangle de PASCAL et Binôme de NEWTON

Prop 1 : • $\binom{n}{0} = 1$ • $\binom{n}{n} = 1$ • $\binom{n}{1} = n$

Démonstration :

Triviale avec la définition de $\binom{n}{p}$

ou par le calcul avec la convention $0! = 1$

Prop 2 : Politique du choix ou du "non-choix"

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Démonstration : Il est équivalent de prendre p éléments parmi n ou de laisser n-p élément parmi n.

Prop 3 : Pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq n-1$

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Démonstration : On utilise 2 stratégies de comptage équivalentes pour dénombrer le nombre de parties de E à p éléments.

1ère stratégie - comptage direct.

Il y a $\binom{n}{p}$ combinaisons de p éléments parmi n.

2ème stratégie : Soit a un élément de E.

Il y a 2 sortes de parties de E à p éléments

→ celles qui contiennent a et p-1 autres éléments parmi les n-1 restants ⇒ il y en a $\binom{n-1}{p-1}$

→ celles qui ne contiennent pas a. Elles contiennent p éléments parmi les n-1 éléments différents de a

⇒ il y en a $\binom{n-1}{p}$

Les 2 stratégies étant équivalentes on a bien

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

Application : le triangle de PASCAL

C'est un outils pratique pour calculer les $\binom{n}{p}$ mais pas seulement

Pour le construire, on utilise la propriété 3 $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$\rightarrow (a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$\rightarrow (a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

exemple de calcul : $\binom{3}{2} = \binom{2}{2} + \binom{2}{1}$

$\binom{7}{5} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4}$

Propriété : Formule du binôme de Newton

Soient a et b deux réels

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p \times b^{n-p}$$

Les $\binom{n}{p}$ interviennent dans la formule du binôme de Newton

↳ on les appelle les nombres binomiaux

Cas particulier : $a = b = 1$ on obtient

$$(1+1)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \times 1^p \times 1^{n-p}$$

$$\Leftrightarrow 2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$$

On retrouve le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments.