III Rappels : Variable aléatoire réelle (v.a.r.)

Définition : Une variable aléatoire est une fonction qui à toute issue d'une expérience aléatoire associe un réel. On la note souvent X, Y...

Rq : Autrement dit, c'est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$

exemple : On organise une tombola. Il y a 100 tickets qui coûtent 2 euros chacun.

Il y a 1 ticket gagnant pour un lot de 100 euros

5 tickets gagnant un lot de 5 euros

10 tickets gagnant un lot de 2 euros

X est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur

* Loi de probabilité de X

Méthode : → On détermine toutes les valeurs x_i que peut prendre la variable aléatoire X

→ On calcule chacune des probabilités

$p_i = p(\{X = x_i\})$

→ s'il n'y a pas trop de valeurs, on donne cette loi de probabilité sous forme de tableau

Dans le cas présent.

La variable aléatoire X prend les valeurs 98, 3, 0, -2

$$p(\{X = 98\}) = p(X = 98) = \frac{\text{nbre de cas fav}}{\text{nbre de cas poss}} = \frac{1}{100}$$

$$p(\{X = 3\}) = \frac{5}{100}$$

LOI DE PROBABILITE DE X

x_i	98	3	0	-2	Total
$p_i = p(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{84}{100}$	1
$x_i p_i$	$\frac{98}{100}$	$\frac{15}{100}$	0	$\frac{-168}{100}$	$-\frac{55}{100} = -0{,}55 = E(X)$

Espérance mathématique $E(X)$

Déf : $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Remarque très importante :

Étant donné qu'une probabilité correspond à une fréquence statistique, le calcul de l'espérance mathématique est donc le même que celui de la moyenne $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$

→ Pour interpréter l'espérance mathématique, il faudra construire une phrase avec :

- le verbe espérer
- l'expression "en moyenne"
- indiquer qu'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire (pour basculer dans le domaine des statistiques).

Dans le cas présent : on remplit la dernière ligne du tableau (ou à la calculatrice avec le tableur)

et on obtient $E(X) = -0{,}55$

Interprétation : Sur un grand nombre de tickets achetés on peut espérer perdre en moyenne 55 cts d'euros par billet acheté.

Rq : Lorsque l'espérance mathématique est égale à 0 on dit que le jeu est équitable (lorsqu'il s'agit d'un jeu)

Remarque : Comme en statistique, la moyenne (l'espérance) est insuffisante pour décrire une série statistique.

Il faut d'autres outils pour affiner l'étude pour traduire l'échantillonnage, faire des estimations ou prendre des décisions ou donner des intervalles de confiance

(*) Variance et Ecart-type. ($V(x)$ et $\sigma(x)$)

Définition : la variance d'une variable aléatoire X est noté $V(x)$. On dispose de 2 formules pour la calculer :

1ère formule (celle qui a du sens !)

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(x)\right)^2$$
$$= p_1 \left(x_1 - E(x)\right)^2 + p_2 \left(x_2 - E(x)\right)^2 + \dots + p_n \left(x_n - E(x)\right)^2$$

C'est la moyenne des carrés des écarts avec l'espérance

2ème formule (parfois plus pratique pour les calculs)

$$V(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2\right] - \left[E(x)\right]^2$$

Remarque : si la variable aléatoire se mesure dans une unité, la l'unité de la variance est le carré de l'unité de X.
C'est donc un calcul intermédiaire peu exploitable.
On définit alors l'écart type qui sera exprimé dans la même unité que X par -

Définition : L'écart type d'une variable aléatoire X est
$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

Dans le cas présent, on obtient à la calculatrice en suivant la même procédure que celle utilisée en statistiques.
A la calculatrice on obtient :

$E(x) = \bar{x} = -0,55$

$\sigma(x) = 9,977$

$V(x) = (\sigma(x))^2 = 99,548$