

II Relations fonctionnelles de la fonction ln (propriétés)

Propriétés de la fonction ln

1°) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

2°) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

3°) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

4°) $\ln(a^p) = p \ln a \quad \forall p \in \mathbb{Z}$

5°) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Propriétés de la fonction exponentielle

• $e^{a+b} = e^a \times e^b$

• $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

• $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

• $\forall p \in \mathbb{Z} \quad e^{pn} = (e^n)^p$

Démonstration :

1°) on utilise la propriété $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

$$e^{\ln ab} = ab$$

$$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b$$

$$e^{\ln ab} = e^{\ln a + \ln b} \quad \Leftrightarrow \ln ab = \ln a + \ln b$$

2°) $\ln 1 = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right)$

$$\Leftrightarrow 0 = \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right) \quad (\text{prop 1})$$

$$\Leftrightarrow -\ln a = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

3°) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$

4°) $e^{\ln(a^p)} = a^p$

$$e^{p \ln a} = e^{\ln a \times p} = (e^{\ln a})^p = a^p \quad \left. \vphantom{e^{p \ln a}} \right\} \text{d'où l'égalité.}$$

5°) $\forall a > 0 \quad a = (\sqrt{a})^2$

$$\ln a = \ln(\sqrt{a}^2)$$

$$\Leftrightarrow \ln a = 2 \ln \sqrt{a} \quad \text{prop 4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln a = \ln \sqrt{a}$$