IV Résolution d'équations et d'inéquations avec logarithme

Exemple 1 : En utilisant la définition

Résoudre $\ln(2x+3) = -5$

(*) Recherche de l'ensemble de définition de l'équation

On doit avoir $2x+3 > 0$

$\iff x > -\frac{3}{2}$

L'ensemble de définition de l'équation est $D =]-\frac{3}{2} ; +\infty[$

(*) Résolution :

$\ln(2x+3) = -5$

$\iff 2x+3 = e^{-5}$

$\iff 2x = e^{-5} - 3$

$\iff x = \frac{e^{-5}-3}{2}$ $\qquad S = \left\{ \frac{e^{-5}-3}{2} \right\}$

Rq : on peut aussi utiliser la fonction exponentielle dès le début après l'ensemble de définition

$\ln(2x+3) = -5 \iff e^{\ln(2x+3)} = e^{-5}$

$\iff 2x+3 = e^{-5} \ldots$

Rq : L'ensemble de définition est à faire systématiquement dès le début SAUF s'il est donné dans l'énoncé.

Propriété : Conséquence de la stricte croissance de ln.

Pour tous réels x et a strictement positifs.

1) $\ln x = \ln a \iff x = a$ … équations

2) $\ln x > \ln a \iff x > a$ … inéquations

Exemple 2 : $\ln(x^2+4x+3) = \ln(x+7)$.

→ **Ensemble de définition :**

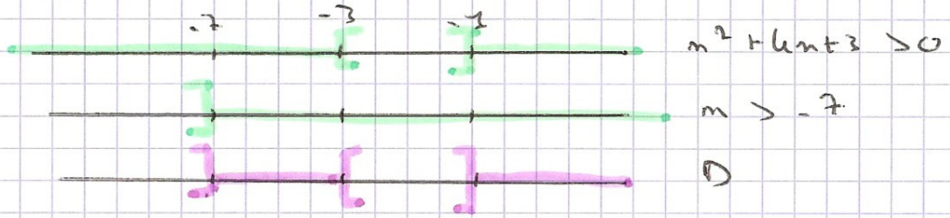
On doit avoir $\begin{cases} x^2+4x+3 > 0 \\ x+7 > 0 \end{cases}$

Pour x^2+4x+3 :

$\Delta = \ldots$ Il y a 2 racines $x=-1$ ou $x=-3$

Le trinôme est du signe de $a=1$ à l'extérieur des racines.

On doit avoir $\begin{cases} x^2+4x+3 > 0 \\ x > -7 \end{cases}$



$D =]-7\,;-3[\cup]-1\,;+\infty[$

→ **Résolution :**

$\ln(x^2+4x+3) = \ln(x+7)$

$\Leftrightarrow x^2+4x+3 = x+7$

$\Leftrightarrow x^2+4x+3-x-7=0$

$\Leftrightarrow x^2+3x-4=0$ $\quad \Delta = \ldots$ 2 racines

$x_1 = 1 \quad x_2 = -4$

Conclusion : $S = \{1\,;-4\}$

Exemple 3 : $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$

→ Ensemble de définition :

On doit avoir $\begin{cases} x+1>0 \\ x+3>0 \\ x+7>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>-3 \\ x>-7 \end{cases} \Rightarrow x>-1$

$D =]-1 ; +\infty[$

→ Résolution :

$\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$

$\Leftrightarrow \ln((x+1)(x+3)) = \ln(x+7)$

$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 3x + x + 3) = \ln(x+7)$

$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 4x + 3) = \ln(x+7)$

⋮

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -4$ $\qquad S = \{1\}$

Exemple 4 : $\ln x = \ln(4-x) - \ln(x+2)$

→ Ensemble de définition

On doit avoir $\begin{cases} x>0 \\ 4-x>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<4 \\ x>-2 \end{cases}$ $\qquad D =]0 ; 4[$

→ Résolution

$\ln x = \ln(4-x) - \ln(x+2)$

$\Leftrightarrow \ln x + \ln(x+2) = \ln(4-x)$

$\Leftrightarrow \ln(x(x+2)) = \ln(4-x)$

$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 2x) = \ln(4-x)$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 4-x$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$ $\qquad S = \{1\}$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -4$

Exple 5 : $\ln(x+7) < 3$

→ Ensemble de définition

On doit avoir $x+7 > 0 \iff x > -7$

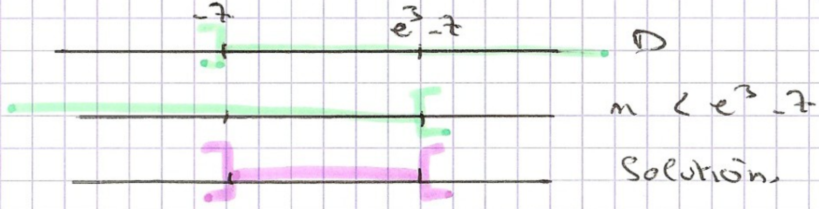
$D =]-7\,;+\infty[$

→ résolution $\ln(x+7) < 3$

$\iff e^{\ln(x+7)} < e^3$ car exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\iff x+7 < e^3$

$\iff x < e^3 - 7$



$S =]-7\,; e^3-7[$