V Limites aux bornes de l'ensemble de définition - complément de dérivation.

Propriété : 1°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ 2°) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

Démonstration :

1) Soit $A > 0$

on sait que $\ln x > A$

$\Leftrightarrow e^{\ln x} > e^{A}$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $[A, +\infty[$

$\Leftrightarrow x > e^{A}$

donc tout intervalle ouvert du type $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $\ln x$ pour $x > e^{A}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

2°) on a pour tout réel $x > 0$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \Rightarrow \ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{X \to +\infty} -\ln X = -\infty$

par composition

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$

Propriété Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I

$\ln u$ est dérivable sur I et on a

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$